এই লেখকের লেখা

টাকাকড়ি

লোকবাহুল্যের আতঙ্ক

অর্থনৈতিক তত্ত্বের বিবর্ত্তন

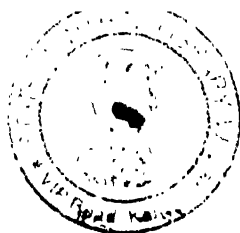
—প্রথম খণ্ড—

ছেলেদের জন্য

বিজ্ঞান : তুমি কি জান?

গল্প : সাগরদ্বীপের পাগলা বুড়ো

গল্প : মানুষ খেকোর দেশে

সংখ্যা-বিজ্ঞানের অ আ ক খ

শ্রীরবীন্দ্র নাথ ঘোষ

শ্রীনিস্তারণ চক্রবর্ত্তী, অধিকর্ত্তা, প্রাদেশিক
পরিসংখ্যান-করণ লিখিত ভূমিকাসহ

ওয়েষ্ট বেঙ্গল প্রিন্টিং ওয়ার্কস্
৮-এ, দীনবন্ধু লেন, কলিকাতা ৬

শ্রীযুক্ত সুবোধ কুমার ঘোষ

শ্রদ্ধাস্পদেষু

মুখপত্র

যদিও অতি প্রাচীন কাল থেকেই সংখ্যাতত্ত্বের ব্যবহারিক প্রয়োগ কিছু কিছু চলে আসছে তবু ইহা এখনও ক্রমবিকাশের পথে একথা বলা যেতে পারে।

বিজ্ঞানের এমন কোনও শাখা নেই যে ক্ষেত্রে গবেষণামূলক কাজের জন্যে সংখ্যাতত্ত্বের প্রয়োজন হয় না। সুতরাং এই নিতান্ত প্রয়োজনীয় বিষয়টি শেখানোর জন্য বাংলা ভাষায় সংখ্যাতত্ত্বের বই লেখা দরকার মনে করি। এতে যে শুধু বাংলা ভাষার সমৃদ্ধি সাধিত হবে তা নয়, পরন্তু এই দেশের প্রথম শিক্ষার্থীরা মাতৃভাষায় লেখা বই পড়ে বিষয়টি সহজে আয়ত্ত করতে পারবেন। এই প্রকার বই রচনা করার প্রধান অসুবিধা এই যে সংখ্যাতত্ত্ব বিষয়ক পরিভাষার এখনও বহুল প্রচলন হয়নি। এই কারণে বিষয়গুলিকে বাংলা ভাষায় সহজবোধ্য ভাবে প্রকাশ করা বিশেষ যত্নসাপেক্ষ। কিন্তু চলিলেই চলা সহজ হয়, এবং উদ্দেশ্য মহৎ হ'লে চালাবার প্রচেষ্টামাত্রই প্রশংসনীয়। এই বিষয়ে গ্রন্থকার আমাদের কৃতজ্ঞতা অর্জ্জন করেছেন।

প্রথম শিক্ষার্থীদের জন্য এই বইখানিতে সংখ্যাতত্ত্ব বিষয়ক মোটামুটি সব কথা সন্নিবেশিত করা হয়েছে। লেখকের উদ্যম সফল হয়েছে। সব চাইতে বড় কথা এই যে বইখানির কয়েক পাতা পড়লেই দেখা যায় যে, বিষয়বস্তুগুলিকে বুঝিয়ে বলবার জন্য গ্রন্থকার সতত যত্নবান্। বইখানির ষোড়শ অধ্যায়ে কাল শ্রেণী (টাইম সিরিজ) বিশ্লেষণের মৌলিকতা এর প্রকৃষ্ট প্রমাণ।

বইখানি পড়ে শিক্ষার্থীরা উপকার পাবেন। আমি এর বহুল প্রচার কামনা করি। ইতি—

শ্রীনিস্তারণ চক্রবর্ত্তী

৩০-৮-৫০ অধিকর্ত্তা, প্রাদেশিক পরিসংখ্যান করণ

গ্রন্থকারের নিবেদন

বি-কম্ শ্রেণীর ছাত্র শ্রীমান্ সুভাষ রায়ের উৎসাহ ও তাগিদেই এই গ্রন্থ লেখা। বাংলা ভাষায় এ জাতের বই লেখা দুঃসাহসের কাজ। সুভাষ ও তার সহাধ্যায়ী বন্ধুদের আগ্রহ ও অনুরোধেই আমার এ দুঃসাহস। যাদের উপলক্ষ্য ক'রে এই বই লেখা তাদের ভাল লাগলেই আমার শ্রম সার্থক হয়েছে মনে করব।

টেক্‌নিক্যাল শব্দগুলির বাংলা প্রতিশব্দ যথাসম্ভব ব্যবহার করলেও বাংলা ভাষায় মূল টেক্‌নিক্যাল শব্দ গ্রহণ করারই আমি পক্ষপাতী। তা না হলে যথেষ্ট গোলমাল সৃষ্টি হবার সম্ভাবনা থাকে। Table শব্দের পরিভাষা কি হবে? তালিকা? তা' হলে List শব্দের পরিভাষা কি? "গ্রাফ" না বলে "লেখ" বললে কি বাংলা ভাষা বেশী সমৃদ্ধ হয়? অথবা বোঝার সুবিধা হয়? পরিভাষা সৃষ্টির দিকে তাই নজর না দিয়ে ভাষা ক'রতে চেয়েছি সহজবোধ্য; নীরস সংখ্যা-বিজ্ঞানকে ক'রতে চেয়েছি গল্পের মত সরস ও হৃদয়গ্রাহী। কতটা সফল হয়েছি পাঠকগণই বলবেন।

যে কালে চুটকি গল্প ও রোমাঞ্চকর উপন্যাসের চলনই বেশী, সেকালে এই ধরণের বই ছাপার সৎসাহস দেখিয়ে ওয়েষ্ট বেঙ্গল প্রিন্টিং ওয়ার্কস্ আমাদের সকলেরই কৃতজ্ঞতাভাজন হয়েছেন। পশ্চিম বাংলা গভর্ণমেন্টের প্রভিন্সিয়্যাল্ ষ্ট্যাটিষ্টিক্যাল্ ব্যুরোর ডিরেক্টর শ্রীযুক্ত নিস্তারণ চক্রবর্ত্তী মহাশয় মুখপত্র লিখে দিয়ে গ্রন্থের গৌরব বাড়িয়ে দিয়েছেন। খ্যাতনামা কমার্শিয়্যাল আর্টিষ্ট শ্রীঅরবিন্দ দত্ত, গ্রন্থের চিত্রগুলি এঁকে দিয়ে আমায় অশেষ ঋণপাশে আবদ্ধ করেছেন। সন্ন্যাসী-শিল্পী ভোলা চট্টোপাধ্যায়,

সাংবাদিক-অধ্যাপক সুধাংশু চৌধুরী ও অ্যাডভোকেট বিনয় দত্তর কাছে উৎসাহ ও প্রেরণা না পেলে গ্রন্থ লেখা সম্পূর্ণ হ'ত কিনা সন্দেহ। কল্যাণীয় বিভাস রায় টেবল্‌গুলি সঙ্কলন ক'রতে যথেষ্ট সহায়তা করেছে। তাড়াতাড়ি বই বার ক'রতে গিয়ে ছাপার ভুল কিছু থেকে গেছে। সেজন্য সব দোষ আমার।

৭৯ ৭বি লোয়ার সার্কুলার রোড
কলিকাতা-১৪,
১০ই সেপ্টেম্বর, ১৯৫০

শ্রীরবীন্দ্র নাথ ঘোষ

সূচীপত্র

প্রথম অধ্যায়

ইতিহাস :

সংখ্যা-বিজ্ঞান বিশেষভাবে পরিণতি লাভ করেছে মাত্র পঞ্চাশ বৎসর পূর্ব্বে। তবে সংখ্যাতথ্য নিয়ে লোকে মাথা ঘামিয়েছে বহু শতাব্দী পূর্ব্ব থেকেই। জাতি-সংগঠনের সঙ্গে সঙ্গে গড়ে উঠেছে সংখ্যা-বিজ্ঞান। মানুষ যখন সঙ্ঘবদ্ধ হয়ে বাস করতে সুরু করল, তখন দলগত লোকজন সম্বন্ধে নানা তথ্য সংগ্রহ করা দলপতির পক্ষে একান্ত প্রয়োজনীয় হয়ে পড়ল। গোষ্ঠীর বিভিন্ন লোকের আয় সম্বন্ধে বা ধনদৌলৎ সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান থাকলে তবেই স্থির করা যায় কার কাছে কিরূপ কর আদায় করা যাবে; সামরিক শক্তি সম্বন্ধে সম্যক পরিচয় দিতে হলে, জানা প্রয়োজন সৈন্য হবার মত লোকের সংখ্যা কত। প্রাচীনকাল থেকেই বিভিন্ন দেশে এই ধরণের তথ্য সংগৃহীত হয়ে আসছে। এই সব তথ্যকে সংখ্যা-বিজ্ঞানের কোঠায় ফেলা না গেলেও একথা ঠিক যে এই সবই হচ্ছে সংখ্যা-বিজ্ঞান বিকাশের ভিৎ।

পিরামিড তৈরী করার সুব্যবস্থা করার জন্য সেই খৃঃ পূঃ ৩০৫০ সনে মিশর দেশে লোকবল ও দৌলৎ সম্বন্ধে তথ্য সংগৃহীত হয়। দেশের লোকের মধ্যে নতুন ভাবে জমি বিলি-বন্দোবস্ত করে দেওয়ার জন্য খৃঃ পূঃ ১৪০০ সনে দ্বিতীয় রামেসীস দেশের জমি-জমার সেন্সাস গ্রহণ করেছিলেন। সামরিক শক্তির একটা হদিস্ পাওয়ার জন্য মুশা ইসরাইল-বাসীদের গণণার মধ্যে এনেছিলেন।

প্রাচ্য দেশ সমূহেও তথ্য সংগ্রহের রেওয়াজ অতি প্রাচীনকাল থেকেই দেখা যায়। চীনা সরকারের নির্দ্দেশে ইউকিন্ (yukin) খৃঃ পূঃ ১২০০ সনে বিভিন্ন প্রদেশ সম্বন্ধে নানা তথ্য সংগ্রহ করেন। খৃঃ পূঃ ৩০০ সনে অর্থশাস্ত্র প্রণয়ণ করেন কৌটীল্য। কর নির্দ্ধারণ, সৈন্য সংগ্রহ, শস্যাদি উৎপাদন প্রভৃতি বিভিন্ন বিষয় সম্বন্ধে তথ্য কিভাবে সংগ্রহ করতে হবে তার নির্দ্দেশ কৌটিল্যের গ্রন্থে আছে। আকবর বাদশার রাজত্বকালে আবুল ফজল্ 'আইন-ই আকবরী' প্রণয়ণ করেন; এই গ্রন্থেও জন-সংখ্যা,

ব্যবসা-বাণিজ্য, দেশের আর্থিক অবস্থা প্রভৃতি সম্বন্ধে তথ্য পাওয়া যায়। গ্রীক্, রোম, প্রভৃতি ইউরোপীয় দেশ সমূহেও রাজ্যশাসন সম্পর্কে সংখ্যা-তথ্যের ব্যবহার দেখা যায়।

ষোড়শ শতাব্দীর পর ইউরোপীয় দেশ সমূহে মার্কেন্টিলিজম্ বা বাণিজ্যবাদ ছড়িয়ে পড়ে। বাণিজ্যবাদের মূলকথা হল—'ব্যালান্স অফ ট্রেড' বা 'বাণিজ্য-নিক্তি' অনুকূলে রাখা এবং তা করতে হলে চাই বিশেষ বিশেষ শিল্পকে উৎসাহ দান ও তদনুয়ায়ী উপায় অবলম্বন। এই উদ্দেশ্য সফল করার জন্য নির্ভুল নীতি অবলম্বন করতে হলে নানারকম তথ্য পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে জানা প্রয়োজন। তাই সংখ্যাতথ্য সংগ্রহের প্রসার হয়। অধিকন্তু, এই সময়ে দেখা দিয়েছে কেন্দ্রীভূত রাজতন্ত্র; ফলে নানারূপ তথ্য সংগ্রহের প্রয়োজনীয়তা যায় বেড়ে। শত্রুর তুলনায় নিজের শক্তি ও সম্বল কতখানি যে-রাজা পূর্ব্বাহ্নেই অনুমান করতে পারেন তাঁর পক্ষে শত্রুকে জয় করা সহজ হয়। সপ্তদশ শতাব্দীর গোড়ার দিকে হেন্‌রি অফ্ নাভারের জন্য শুলি (Sully) ফ্রান্সের অর্থনৈতিক ও সামরিক শক্তি সম্বন্ধে বিশদ তথ্য সংগ্রহ করেন। তবে এ পর্য্যন্ত নিয়মিত ভাবে নির্দ্দিষ্ট সময় অন্তর-অন্তর কোন বিশেষ বিষয় সম্পর্কে তথ্য গ্রহণের রেওয়াজ দেখা যায় না। নিয়মিত ভাবে সংখ্যাতথ্য সঙ্কলনের রেওয়াজ প্রুশিয়াতেই প্রথম দেখা যায়। ১৭১৯ খৃষ্টাব্দে প্রথম ফ্রেডারিক উইলিয়মের সময়ে লোকবল, উপজীবিকা, গৃহ, ক্ষেত-খামার, কর প্রভৃতি বিষয়ে তথ্য সঙ্কলিত হ'তে থাকে ছয় মাস অন্তর-অন্তর; পরে এই সব তথ্য একত্রিত করে টেব্‌ল্ তৈরী করা হয় তিন বৎসর ব্যবধান রেখে। ফ্রেডারিক দি গ্রেটও সংখ্যাতথ্যের মূল্য বুঝতেন এবং সঙ্কলিত তথ্য তাঁর চেষ্টায়ই নির্ভুলতর ও পূর্ণতর হয়ে ওঠে। ১৭৪৭ থেকে ১৭৮২র মধ্যে এইভাবে সংখ্যা-বিজ্ঞান বিশিষ্ট রূপ নেয়।

দশ বৎসর অন্তর লোকবলের সেন্সাস গ্রহণ সুরু হয় প্রথমে মার্কিণ দেশে। মার্কিণরাষ্ট্রে নিম্ন পরিষদে প্রতিনিধি নির্ব্বাচন করতে হয় লোকবল অনুসারে; তাই লোকবলের হিসাব গ্রহণ অপরিহার্য্য। শাসনতন্ত্রে তাই লোকবলের সেন্সাস নেওয়ার নির্দ্দেশ আছে। এবং সেই অনুসারে প্রথম সেন্সাস গ্রহণ করা হয় ১৭৯০ খৃষ্টাব্দে। মাত্র এর ১০ বৎসর পরে (১৮০১

খৃঃ) লোকবল গণনার নীতি ইংলণ্ড অনুসরণ করে। ক্রমশঃ পৃথিবীর অন্যান্য বহুদেশই লোকবলের সেন্সাস গ্রহণ সুরু করে। চীন দেশে প্রথম সেন্সাস গ্রহণ করা হয় ১৯১১ সনে।

সংখ্যাতথ্য নিয়ে তুলনামূলক আলোচনা প্রাচীনকালে বিশেষ হয়েছে বলে মনে হয় না। জাতীয়তাবোধ জাগরণের সঙ্গে সঙ্গে এবং বিভিন্ন জাতির মধ্যে প্রতিযোগীতা দেখা দেওয়ার পর তুলনামূলক আলোচনার চেষ্টা কিছু হয়েছে। ১৫৪৪ খৃঃ হাইডেল্‌বার্গের, অধ্যাপক সেবাষ্টিয়ান্ ম্যুনষ্টার (Sebastian Muenster) প্রাচীন দেশগুলির ধন-দৌলৎ, সামরিক শক্তি, আইন প্রভৃতি সম্বন্ধে এক ব্যাপক গ্রন্থ প্রণয়ণ করেন। পরে ইতালিবাসী ফান্সেস্‌কো সান্‌সোভিনো (Francisco Sansovino, 1562) ও জোভান্নি বোতেরো (Giovanni Botero, 1589) অনুরূপ গ্রন্থ প্রকাশ করেন। পরে আরো বহু গ্রন্থ প্রণীত হয়েছে বটে, কিন্তু বিভিন্ন দেশের তথ্য-সঙ্কলন প্রণালী বিভিন্ন বলে তুলনামূলক আলোচনা খুব নির্ভরযোগ্য হয়নি।

সংখ্যাতথ্য কিভাবে রাষ্ট্রের কাজে লাগে প্রধানতঃ সেই কথাই এ পর্য্যন্ত বলেছি। সপ্তদশ শতাব্দীর গোড়া থেকেই সংখ্যাতথ্যকে অন্যান্য কাজেও লাগান হচ্ছে। অবৈধ সন্তান জন্ম সংহত করার জন্য প্রটেষ্টাণ্ট চার্চ্চ অনুজ্ঞা দেন যে জন্ম, মৃত্যু ও বিবাহের হিসাব রাখতে হবে চার্চ্চের খাতায়। জার্ম্মাণী ও ইংলণ্ডের সহরগুলিতে প্রায় নির্ভুলভাবে এই ধরণের হিসাব রাখা হত। ষ্ট্রাস্‌বুর্গের অধ্যাপক জর্জ্জ ওবরেখ্‌ট্ (George Obrecht 1612) বলেন যে জন্ম-মৃত্যু ও অপরাধীদের হিসাব রাষ্ট্রেরই রাখা কর্ত্তব্য এবং একটা পরিকল্পনা তৈরী করে দেখিয়ে দিয়েছিলেন নৈতিক উন্নতি, বীমা ও পেন্সন প্রথা প্রচলনের সহায় সংখ্যা-বিজ্ঞান কি ভাবে হতে পারে। লণ্ডনের ক্যাপ্টেন জন গ্রণ্ট (১৬৬১) জন্ম-মৃত্যু বিষয়ক তথ্য বিশ্লেষণ করে দেখিয়ে দেন যে জন্ম-মৃত্যুর তালিকা পেলে বলে দেওয়া যায় দেশের মোট লোক সংখ্যা কত। জ্যোতির্বিদ নর্ম্যান হ্যালি প্রথম তৈরী করেন একটা সম্পূর্ণ লাইফ্ টেবল্ (পরমায়ুকালের তালিকা) এবং তা থেকে স্থির করেন কোন্ বয়সের বাঁচার সম্ভাবনা কতখানি (অর্থাৎ পরমায়ু-কাল কত); সুতরাং বলা যায় যে আধুনিক জীবনবীমার ভিত্তি হল হ্যালির টেবল্।

গণিতের সঙ্গে সংখ্যা-বিজ্ঞানের গাঁঠছড়া বেঁধে দেন অধ্যাপক জাক বের্নুইলি (Jacques Bernouilli); ইনি 'সম্ভাব্যতা তত্ত্ব'র (Theory of Probabilities) ব্যাখ্যা করেন গণিতের সাহায্যে। আর এক ধাপ এগিয়ে দেন যোহান পিটার স্যুস্‌মিল্‌খ্ (Johann Peter Sussmilch): তারপর আসেন লাপ্লাস, ফুরিয়ে, কেতেলে (Quetelet) হার্শেল প্রভৃতি।

সংজ্ঞা:

ওয়েবষ্টার সংখ্যা-বিজ্ঞানের সংজ্ঞা দিয়েছেন এই: "সংখ্যা-বিজ্ঞান হল রাষ্ট্রভুক্ত লোকসমষ্টির অবস্থা সম্পর্কিত শ্রেণীবদ্ধ তথ্য....বিশেষতঃ সেই সব তথ্য যে গুলিকে সংখ্যায় বা সংখ্যামূলক তালিকায় অথবা তালিকাবদ্ধ বা শ্রেণীবদ্ধ ভাবে সাজানো যায়।" সংখ্যা-বিজ্ঞানের এই সংজ্ঞা সে রকম ব্যাপক নয়। এ যুগে ব্যাপকতর অর্থে সংখ্যা-বিজ্ঞান ব্যবহৃত হয়। জীববিজ্ঞান, জ্যোতির্বিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয় সম্পর্কে সংগৃহীত তথ্যও সংখ্যা-বিজ্ঞানের বিষয়-বস্তু হতে পারে।

বাউলি একটা সংজ্ঞা দিয়েছিলেন এই রকম: "সমাজ গঠনের সর্ব্ববিধ অভিব্যক্তির পরিমাপ বিষয়ক বিজ্ঞানই সংখ্যা-বিজ্ঞান।" এই সংজ্ঞাও সম্পূর্ণ ব্যাপক নয়, কেন না, সংখ্যা-বিজ্ঞানের ক্ষেত্রকে সীমাবদ্ধ রাখা হয়েছে এক মানুষ ও তার কর্ম্মশক্তির মধ্যেই। সামাজিক ঘটনাবলি ছাড়াও জৈবিক, প্রাকৃতিক প্রভৃতি ঘটনাবলি সম্বন্ধে অনুসন্ধানও সংখ্যা-বিজ্ঞানের অন্তর্গত।

আবার কেউ কেউ বলেন: সংখ্যা-বিজ্ঞান হল "গণণা-বিষয়ক বিজ্ঞান।" এই সংজ্ঞাও ঠিক নয়; সংখ্যা-বিজ্ঞানের কাজ একমাত্র গণণাতেই সীমাবদ্ধ নয়, সংগৃহীত তথ্য নিয়ে আনুমানিক হিসাব-নিকাশও চলে। বাংলা দেশে চাল উৎপাদনের হিসাব নিতে গিয়ে গভর্ণমেণ্টের কৃষি বিভাগ প্রতিটি ক্ষেত থেকে কতটা চাল পাওয়া গেছে তার হিসাব নেওয়ার চেষ্টা করেন না, মাত্র আনুমানিক হিসাব করেন যে বিগত বৎসরের তুলনায় বর্ত্তমান বৎসরে কতটা চাল পাওয়ার সম্ভাবনা। একমাত্র গণণার উপরে নির্ভর না কোরেও উৎপন্ন শষ্য সম্পর্কে প্রায়-নির্ভুল তথ্য এইভাবে সংগ্রহ করা চলে। লোকবল সম্পর্কে সেন্সাস নেওয়ার সময় যে প্রতিটি লোককেই গণণার মধ্যে আনা হয়েছে এ কথা কেউ বলবে না। এই

সংজ্ঞার আর একটি দোষ এই যে এতে শুধু তথ্য সংগ্রহের কথাই বলা হয়েছে, সংগৃহীত তথ্য বিশ্লেষণের কথা এতে নেই, অথচ, সংখ্যা-বিজ্ঞানের এ দুটিই অপরিহার্য্য অঙ্গ।

বাউলি বলেছেন: "সংখ্যা-বিজ্ঞানকে বলা যায় গড় বিষয়ক বিজ্ঞান।" কিন্তু আধুনিক সংখ্যা-বিজ্ঞানে গড় ছাড়া অন্যান্য বিষয়েরও আলোচনা থাকে। রেখা-চিত্রণ, পিক্টোগ্রাম, প্রভৃতির ব্যবহার সংখ্যা-বিজ্ঞানে আছে, সুতরাং বাউলির এই সংজ্ঞাও সম্পূর্ণ ব্যাপক নয়।

"কোন বিবরণ (এনিউমারেশন) বা হিসাব-সংগ্রহ (collection of estimates) বিশ্লেষণের ফলের উপর নির্ভর করে স্বাভাবিক বা সামাজিক ঘটনা সমূহ বিচার করার পদ্ধতিই হ'ল সংখ্যা-বিজ্ঞান।" সংখ্যা-বিজ্ঞানের যেক'টী সংজ্ঞা নিয়ে আলোচনা করেছি তাদের মধ্যে এটাই হল সব চেয়ে ব্যাপক। আপাততঃ এই সংজ্ঞা ধরেই আমরা আলোচনা করব।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সংখ্যা-বিজ্ঞানের কাজ :

কোন মানুষের পক্ষে বহুবিধ জটীল তথ্য কল্পনা করা বা অনুধাবন করা সহজ বা সম্ভব নয়। দুটি গ্রামের দুহাজার লোকের নাম ও তাদের আর্থিক সঙ্গতির কথা শুধু কানে শুনে গ্রামবাসীদের ঐশ্বর্য্য সম্বন্ধে কোনরূপ তুলনামূলক মতামত দেওয়া কারও পক্ষে সম্ভব বলে মনে হয় না। দুইটি বিভিন্ন জাতি সম্বন্ধে ঐ ধরণের কোন মতামত দেওয়া আরও কত দুঃসাধ্য তা সহজেই অনুমেয়। সংখ্যা-বিজ্ঞান এই ধরণের অসংখ্য তথ্যকে সহজ করে নিয়ে আলোচনার যোগ্য করে তোলে, আয়ত্বের বহির্ভূত তথ্য-গুলিকে গড়ে পরিণত করে আয়ত্বাধীন করে আনে, চিত্র ও রেখাঙ্কনের সাহায্যে সহজবোধ্য করে দেয়। তুলনামূলক আলোচনার সুবিধা করে দেওয়াই সংখ্যা-বিজ্ঞানের প্রধান কাজ। শুধু তথ্য হিসাবেই ভারতের লোকবল গণণা করা হয় না, এই তথ্য-সংগ্রহের উদ্দেশ্য হচ্ছে যাতে এ যুগের লোকবলের সঙ্গে বিগত এক যুগের লোকবলের তুলনা করে বুঝতে পারি যে দেশের লোক কি ভাবে বেড়েছে বা কমেছে, বা অপর দেশের লোকবলের সঙ্গে যাচাই করে বুঝতে পারি আমাদের স্থান কোথায়, বা তুলনা করতে পারি লোকবল বৃদ্ধির সঙ্গে খাদ্য-সংস্থানের। আমাদের অলস অনুসন্ধিৎসা মেটানোর জন্য এই ধরণের তুলনার প্রয়োজন নয়, শাসন বা অর্থনৈতিক সমস্যা সমাধানের জন্য এর প্রয়োজন। যক্ষার প্রাদুর্ভাব কি? বাড়ছে না কমছে? দেশের স্বাস্থ্যের দিকে লক্ষ্য রেখেই এই প্রশ্নের জবাব চাই সংখ্যা-বিজ্ঞানের মারফৎ। প্রতিরোধমূলক কোন্ নীতি গভর্ণমেণ্টের পক্ষে অবলম্বন করা বাঞ্ছনীয় এবং ঐ নীতির ফলে রাজস্বের উপরই বা টান পড়বে কি রকম তার হদিশ পাওয়া যায় সংখ্যা-বিজ্ঞানের সাহায্যে। বাউলি বলেছেন "ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতার প্রসার সাধনই সংখ্যা-বিজ্ঞানের আসল কাজ।" সংখ্যাতথ্যের সাহায্য না নিলে হয়ত বহু ধারণাই আমাদের অস্পষ্ট থেকে

যেত, সংখ্যায় প্রকাশ করলে অস্পষ্ট ধারণা স্পষ্টতর হ'য়ে ওঠে, এক ঘটনার পরিপ্রেক্ষিতে অপর একটিকে ফেলা সহজ হয়।

সংখ্যাতথ্য-সম্মত নিয়মানুগততার বিধি (Law of Statistical Regularity.):

কোন সমষ্টির প্রত্যেকটি একক সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ না করেও সমগ্রভাবে সমষ্টির নির্ভুল পরিচয় দেওয়া সম্ভব। আধুনিক সংখ্যা-বিজ্ঞানের এটা একটা বড় দান। প্রত্যেকটি কেরাণীর আয়ের হিসাব না নিয়েও, বাঙালী কেরাণীর গড় আয় কত বলে দেওয়া যায় যদি নাকি ঠিকমত কয়েকটা নমুনা নিয়ে তা থেকে সঠিক ভাবে গড় হিসাব করা যায়। ধর, একটা ডালিতে এক ডালি কুল আছে; চোখ বেঁধে দুজন ছেলেকে বলা হল ডালি থেকে কুল তুলতে; দুজনের তোলা কুল যদি পৃথক পৃথক ভাবে ওজন করা যায় তা হলে দেখা যাবে যে দুজনেই গড়ে একই ওজনের কুল তুলেছে। গণিতশাস্ত্রে যাকে বলে (Theory of probability) 'সম্ভাব্যতা তত্ত্ব' এটা হল তারই উদাহরণ। সম্ভাব্যতা তত্ত্বের (Theory of probability) মূল কথা হচ্ছে এই: বড় সমষ্টির মধ্য থেকে মাঝারি সংখ্যক উদাহরণ (Item) সরিয়ে নিলে মোটামুটি ভাবে সেই উদাহরণগুলির মধ্যে পাওয়া যাবে বিরাট সমষ্টির লক্ষণগুলি। একটা টাকা নিয়ে একশ' বার ছুঁড়ে ফেললে আশা করতে পারি যে পঞ্চাশবার মাথার দিকটা ও পঞ্চাশবার উল্টো দিকটা উপরে থাকবে। সত্যিকার পরীক্ষা করে দেখলে প্রায় এই ফলই পাব। জুয়া যারা খেলে তারা এই সম্ভাবনার উপর নির্ভর করেই বাজি ধরে। বীমা ব্যবসায় গড়ে উঠেছে এই সূত্রের উপরে নির্ভর করেই। একেই বলা হয় (Law of Statistical Regularity) সংখ্যাতথ্য-সম্মত নিয়মানুগততার বিধি।

বৃহৎ সংখ্যার জড়ত্ব (Inertia of Large Numbers):

কোন একটা বড় সমষ্টির কোন অংশ যদি একদিকে পরিবর্ত্তিত হতে থাকে, তখন সেই সমষ্টির অনুরূপ একটা অংশের বিপরীত দিকে পরিবর্ত্তিত হওয়ার সম্ভাবনা; এই উভয় পরিবর্ত্তনের মিলিত পরিবর্ত্তনে মোটমাট যা

পরিবর্ত্তন হয় তা অকিঞ্চিৎকর। কোন বিশেষ দেশে গম উৎপাদনের পরিমাণ প্রতি বছরই পরিবর্ত্তিত হতে পারে তবু পৃথিবীর মোট গম উৎপাদনের পরিমাণ সমগ্রভাবে ধরলে বহু বছর ধরে অপরিবর্তিত থাকতে পারে। কোন একটা বৎসরে, বিগত যে-কোন-বৎসরের তুলনায় কলকাতা সহরে অগ্নিকাণ্ডে ক্ষতির পরিমাণ বেশী হতে পারে অথচ সমগ্র ভারতবর্ষে অগ্নিকাণ্ডে বার্ষিক ক্ষতির পারমাণ কোন রকম বেশী-কম না হতে পারে। অগ্নি-বীমাকারী কোম্পানীগুলো এই সূত্রের উপরে নির্ভর কোরেই প্রায়-নির্ভুল ভাবে হিসাব করে ফেলতে পারেন ক্ষতির পরিমাণ কি হওয়া সম্ভব। একে বলা হয়, বৃহৎ সংখ্যার জড়ত্বের নিয়ম (Law of Inertia of large Numbers)। আরো বলা যেতে পারে যে এটা হল "সম্ভাব্যতা তত্ত্বে"র (Theory of Probability) বিকল্প। তবে এই জড়ত্ব ধর্ম্ম একথা বলে না যে কালের গতির সঙ্গে কোনরূপ পরিবর্ত্তন হওয়া সম্ভাবনার বাইরে। ভারতবর্ষে অগ্নিকাণ্ডে ক্ষতির বহর বছরের পর বছর প্রায় একই ধারায় হতে পারে যদিও পাথর বা কংক্রীটের তৈরী বাড়ীর সংখ্যা বেড়ে যাওয়ার জন্য ক্ষতির পরিমাণ কম হয়ে আসা সম্ভব। কোন বিশেষ কারণের জন্ম কোন একটা বিশেষ দিকে পরিবর্ত্তনের ঝোঁক যদি বেশী থাকে তা হলে এই নিয়ম খাটে না। প্রাদেশিক গভর্ণমেণ্ট কতটা ঋণ গ্রহণ করতে পারেন তার একটা সীমা আছে; সব প্রদেশই যদি ঐ চূড়ান্ত মাত্রার ঋণ গ্রহণ করে থাকে তা হ'লে কোন একটা বিশেষ প্রদেশ ঋণের বোঝা কমিয়ে ফেললে গোটা ভারতের ঋণের ভারই কমে যাবে, কেন না, চূড়ান্ত মাত্রায় ঋণ প্রদেশগুলি গ্রহণ করেছে বলে এক প্রদেশে ঋণের ভার লাঘব হলেও অপর কোন প্রদেশে ঋণের ভার অনুরূপ পরিমাণে বেড়ে যাওয়ার সম্ভাবনা নেই, সুতরাং সমগ্রভাবে ভারতের অবস্থা পূর্ব্বের মত থাকতে পারে না। "জড়ত্বের নিয়ম" (Law of Inertia) এখানে খাটল না।

তৃতীয় অধ্যায়

সংখ্যাবিজ্ঞানী :

সংখ্যাবিজ্ঞানীর কাজ ত্রিবিধ ; প্রথমতঃ, ষ্ট্যাটিষ্টিক্যাল ডেটা (সংখ্যা-বিজ্ঞান-সম্মত তথ্য) সঙ্কলন করা ; দ্বিতীয়তঃ, সেই সঙ্কলিত তথ্যের বিশ্লেষণ ; তৃতীয়তঃ, সেই বিশ্লেষণের ফলে যা পাওয়া যায় তার ব্যাখ্যা। সংখ্যা-বিজ্ঞান এ যুগে এতটা প্রসার লাভ করেছে যে একই সংখ্যাবিজ্ঞানীকে এই ত্রিবিধ ধারা অনুসরণ করতে হয় না। অর্থাৎ কি পদ্ধতিতে তথ্যগুলি সঙ্কলিত হয়েছে সে বিষয়ে বিশেষ মাথা না ঘামিয়েও সঙ্কলিত তথ্যের বিশ্লেষণে তিনি নিয়োযিত থাকতে পারেন, অথবা তাঁর একমাত্র কাজ হতে পারে বিশ্লিষ্ট তথ্যের ব্যাখ্যা করা। তথ্য সঙ্কলন, বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা—সংখ্যা-বিজ্ঞানের এই তিন ধারা। বিভিন্ন তিন শ্রেণীর হাতে এই তিন ধারা থাকাও বিপদের, কেননা, কি পদ্ধতিতে তথ্যগুলি সঙ্কলিত হয়েছে না জেনে সেই তথ্য নিয়ে কোনরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া বা ব্যাখ্যা করার মধ্যে বিপদ আছে ; যেহেতু তাতে সিদ্ধান্ত সম্পূর্ণ ভ্রমাত্মক হওয়াই সম্ভব। সুতরাং এই তিন ধারার যে কোনটিতেই সংখ্যাবিজ্ঞানী নিযুক্ত থাকুক না কেন প্রত্যেক স্তর সম্বন্ধেই তাঁর ওয়াকিবহাল থাকা প্রয়োজন।

ষ্ট্যাটিষ্টিক্যাল ডেটা :

কোন একক-সমষ্টি সংক্রান্ত গণণা-সাপেক্ষ বা গণিতে প্রকাশযোগ্য তথ্যই হচ্ছে সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত 'ডেটা'। যেমন, বাংলা দেশে কাপড় কল সম্বন্ধে অনুসন্ধান চালান হচ্ছে ; কারখানাগুলিতে কতলোক খাটছে, কত ঘণ্টা কাজ হচ্ছে, কত মজুরী দেওয়া হচ্ছে ইত্যাদি বিষয়ে যে-সব তথ্য সংখ্যায় প্রকাশ করা হয়, সেগুলি হ'ল সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত 'ডেটা'। এই ধরণের 'ডেটা' বা তথ্যের গুরুত্ব পরিপূর্ণ ভাবে উপলব্ধি করতে হলে, তথ্যগুলি হওয়া আবশ্যক যথাযথ। এবং যথাযথ তথ্য মেনে চলে স্থান

ও কালের নির্দ্দেশ ; অর্থাৎ, কোন্ বিশেষ সময় বা কোন্ বিশেষ স্থানের পরিচয় দেয় এই তথ্যগুলি তা জানা প্রয়োজন।

সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত ডেটার প্রয়োজন হয় প্রধানতঃ তুলনামূলক আলোচনার জন্য। দুটী বিষয় সম্পর্কে তুলনা করতে গেলে নিশ্চয়রূপে জানা প্রয়োজন উভয় ক্ষেত্রেই বিভিন্ন সময়ে বা বিভিন্নস্থানে একই শব্দ একই অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে কিনা। চলতি কথায় আমরা বলি "ভারতের লোক প্রবলভাবে বেড়ে গেছে"; আমরা বলি "ভারতের লোক চল্লিশ কোটী হয়েছে।" এই দুরকমের কথা থেকে সাধারণ লোকের মনে জনবল সম্বন্ধে একই ধারণা হবে। "চল্লিশ কোটী" সংখ্যা ব্যবহার করলেও লোকে জানে যে এটী প্রয়োগ করা হয়েছে জনসংখ্যার বিরাটত্ব বোঝাতে, লোকবল গণণা করে একটা খাঁটি হিসাব দেওয়া হয়নি। এ ক্ষেত্রে সংখ্যা ব্যবহার করা হয়েছে একটা 'বিশেষণ' হিসাবে। কিন্তু তুলনামূলক আলোচনার জন্য যখন আমরা সংখ্যা ব্যবহার করি তখন দেখতে হয় যাতে সেই সংখ্যা হয় সঠিক। ধর, আমরা ভারতের আমদানী পণ্যের তুলনা করতে চাই—১৯৩৮ সনের সঙ্গে ১৯৪৮ সনের। কোনরূপ তুলনামূলক আলোচনার পূর্ব্বেই আমাদের দেখা দরকার যে এই দুই বিভিন্ন বর্ষে একই অর্থে "আমদানী" শব্দ ব্যবহৃত হয়েছে কিনা, যে "ভারত" বলতে ১৯৩৮ সনে যে ক্ষেত্র বোঝাত ১৯৪৮ সালেও তাই বোঝাচ্ছে কিনা, যে যে-হিসাব নেওয়া হয়েছে তা নির্ভুল কিনা।

তথ্য সংগ্রহ :

সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত 'ডেটা' নানাভাবে সংগৃহীত হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে আমরা 'ডেটা' পাই শাসনকার্য্যের আনুসঙ্গিক ফল হিসাবে। শুল্কযোগ্য পণ্যকে শুল্ক দিয়ে ভারতে প্রবেশ করতে হয় ; শুল্ক বিভাগকে এর সঠিক হিসাব রাখতে হয়। শুল্ক বিভাগের এই হিসাব পরে সংখ্যা-বিজ্ঞানসম্মত টেবল্ সঙ্কলনের মাল-মশলা জোগায়। শাসনসংক্রান্ত হিসাবপত্র সংখ্যা-বিজ্ঞানের মাল-মশলা জোগায়। এই সব ক্ষেত্রে সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত ডেটা সঙ্কলন মুখ্য উদ্দেশ্য নয়, তবু এইসব তথ্যের মূল্য কম নয়।

কোন সাময়িক প্রশ্ন সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করতে গিয়ে প্রত্যক্ষভাবে পাওয়া যায় সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত ডেটা। যেমন, লোকবলের লেখা-গ্রহণ

করতে গিয়ে পাওয়া যায় লোকবল সম্বন্ধে সংখ্যাতথ্য (ষ্ট্যাটিষ্টিক্‌স্)। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে সংখ্যা-বিজ্ঞানসম্মত অনুসন্ধানের দুটো দিক আছে—(১) মুখ্য উদ্দেশ্যের সহায়ক বা অংশ হিসাবে সংখ্যাতথ্য সঙ্কলন এবং (২) সংখ্যাতথ্য সঙ্কলনই একমাত্র উদ্দেশ্য। সংখ্যাগুলি যে শব্দ প্রসঙ্গে সঙ্কলিত হয়েছে, সেই শব্দের যথাযথ সংজ্ঞার উপর নির্ভর করে সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত ডেটার অর্থ; শাসনসংক্রান্ত কোন বিষয়ের সহায়তার জন্য প্রধানতঃ এই সংজ্ঞা দেওয়া হয়; আবার যে বিষয় সম্পর্কে অনুসন্ধান চালান হচ্ছে তার প্রতি নজর রেখেও এই সংজ্ঞা দেওয়া হয়। যেমন, "আমদানী" শব্দের অর্থ সাধারণ লোকের কাছে এক রকম; বিদেশ থেকে যা-কিছু আমদানী করা হয় সবই তাদের কাছে আমদানী পণ্য। কিন্তু সমুদ্রবাহিত বাণিজ্যের যে বিবরণী গভর্ণমেণ্ট প্রকাশ করেন তাতে "আমদানী" শব্দ ব্যবহার করে থাকেন একটা নির্দ্দিষ্ট অর্থে। ব্যবহার্য্য যে সব জিনিসপত্র বিদেশ থেকে ভ্রমণকারা দেশের মধ্যে সঙ্গে করে নিয়ে আসেন আমদানী পণ্যের বিবরণীতে তার হদিশ নেই; সামরিক বিভাগের নাবিক বা সৈনিকের ব্যবহারের জন্য যে সব পণ্য আমদানী করা হয় তারও হিসাব ঐ বিবরণীতে থাকে না; রাষ্ট্রদূতেরা সরাসরি যে সব পণ্য আমদানী করেন, তাও 'আমদানী পণ্য' বলে গণ্য হয় না। সুতরাং শব্দের সংজ্ঞার উপর কেন জোর দেওয়া হয়েছে বোঝা যাচ্ছে। যে সব ক্ষেত্রে 'ডেটা' পাওয়া যায় পরোক্ষভাবে, সেই সব ক্ষেত্রে 'ডেটা'-সংশ্লিষ্ট শব্দগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয় প্রধানতঃ শাসনকার্য্য-সংক্রান্ত প্রয়োজনের প্রতি লক্ষ্য রেখেই; আর যে সব ক্ষেত্রে সংখ্যাতথ্য (ষ্ট্যাটিষ্টিক্‌স্) পাওয়া যায় প্রত্যক্ষভাবে সেই সব ক্ষেত্রে, যে-সমস্যা উপলক্ষ্য করে তথ্য সংকলিত হয়েছে তার প্রতি নজর রেখেই শব্দগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয়। সংজ্ঞার উপর জোর দেওয়া হচ্ছে এই কারণে যে তখনই সঙ্কলিত সংখ্যাতথ্য কাজের হয় যখন সেগুলিকে পরস্পর সাজিয়ে তুলনামূলক আলোচনা করা সম্ভব হয়। সুতরাং বিভিন্ন দেশ সম্বন্ধে যদি তুলনামূলক আলোচনার প্রয়োজন হয়, তা হ'লে দেখা প্রয়োজন যে ঐ তুলনীয় দেশগুলিতে একই শব্দ একই অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে অথবা যদি বিভিন্ন কাল নিয়ে তুলনা করা হয়, তাহলে দেখা দরকার যে বিভিন্ন কালে ঐ শব্দগুলির সংজ্ঞা ছিল এক।

চতুর্থ অধ্যায়

নির্ভুলতা :

সংখ্যা-বিজ্ঞান সংক্রান্ত 'ডেটা' নির্ভুল হওয়া প্রয়োজন। প্রত্যেক অংশের নির্ভুলতার উপর নির্ভর করে সমগ্রের নির্ভুলতা। শাসন-সংক্রান্ত কার্য্যের প্রয়োজনে যে সব সংখ্যাতথ্য পরোক্ষভাবে সঙ্কলিত হয় সেগুলি সম্পূর্ণ নির্ভুল না হওয়াই সম্ভব, কেন না, তথ্যগুলি মোটামুটি ঠিক হলেই শাসন সংক্রান্ত কাজ চলে যায়। এর অর্থ এ নয় যে ইচ্ছা করেই ভ্রমপূর্ণ তথ্য সংশ্লিষ্ট করা হয় ; অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কাজের চাপে আর পরীক্ষা করে দেখা হয় না যে সঙ্কলিত তথ্যগুলি যথাযথ কিনা। কিন্তু তথ্য-সংগ্রহই যদি মূখ্য উদ্দেশ্য হয় তা হ'লে ধরে নেওয়া যায় যে সেগুলি মোটামুটী নির্ভুল হবে। অর্থাৎ সোজা কথায় বলা যায় যে পরোক্ষভাবে সঙ্কলিত তথ্যের চেয়ে, প্রত্যক্ষভাবে সঙ্কলিত তথ্য অপেক্ষাকৃত নির্ভুল।

সংখ্যা-বিজ্ঞানে প্রায়-নির্ভুল হিসাব নিযেই কাজকারবার। একটা উদাহরণ দি। (ভারতের) কয়লা খনির উৎপাদনের পরিমাণ সম্পূর্ণ নির্ভুল ভাবে হিসাব করা একবারে অসম্ভব। একগাড়ী কয়লাও সম্পূর্ণ নির্ভুলভাবে ওজন করা যায় কিনা সন্দেহ। বিভিন্ন কয়লার খনি থেকে উৎপাদন সম্বন্ধে যে হিসাব পাওয়া যায় তার মধ্যে বিভিন্ন পর্য্যায়ের ভুল থাকাই সম্ভব। অধিকন্তু, মোট-হিসাবে নেহাৎ ছোটখনির উৎপাদন হয়ত হিসাবের মধ্যেই আনা হবে না। এই সব কথা স্মরণ করলে বলা যায় যে ভারতের মোট কয়লা উৎপাদনের হিসাবের মধ্যে কয়েক হাজার টনের গরমিল থাকার সম্ভাবনা। সংখ্যা-বিজ্ঞানে যখন আমরা "গরমিল" বা "গলদে"র কথা বলি তখন আপেক্ষিক গলদের কথাই বলি। পরিমাপের কথা যেখানেই আছে, সেখানে 'গলদ' কিছু-না-কিছু থাকবেই। পদার্থবিজ্ঞান-বিষয়ক মাপজোখ যতটা নির্ভুল হওয়া সম্ভব, সমাজবিজ্ঞান বিষয়ক মাপজোখের পক্ষে তা সম্ভব নয়। সংখ্যা-বিজ্ঞান-বিষয়ক আলোচনায়

পূর্ব্ব থেকেই স্থির করে নিতে হয় কতখানি নিভুর্ল হলে কাজ চলে যায়; তাই দেখতে হয় যে সঙ্কলিত-তথ্য যেন ততখানি নিভুর্ল অন্তত: হয়। অর্থাৎ সংখ্যাবিজ্ঞানে আপেক্ষিক নিভুর্লতাই লক্ষ্য, সম্পূর্ণ নিভুর্লতা নয়।

একটা সংখ্যায় যদি বহুসংখ্যক রাশি থাকে তা হ'লে সেই সংখ্যার তাৎপর্য্য বোঝা কষ্টকর হয়; তাই অনেক সময় সংখ্যাগুলিকে 'শয়ে', 'সহস্রে' কি 'লাখে' ব্যক্ত করা হয়। পশ্চিম বাংলার লোকবলের সঙ্গে ভারতের লোকবলের তুলনা করতে হলে বাংলার লোকবল আড়াই কোটী আর ভারতের লোকবল তেত্রিশ কোটী বললেই চলে; সাধারণ লোক একথা শুনলে লোকবলের গুরুত্ব সম্বন্ধে একটা স্পষ্ট ধারণা করতে পারে। কিন্তু সেন্সাসে প্রকাশিত যথাযথ সংখ্যাটী শুনে সাধারণ লোক সেরূপ করতে পারে না। পপুলার (জনপ্রিয়) বই ও সাময়িক পত্রের লেখায় এবং কখন কখন বৈজ্ঞানিক প্রবন্ধে এধরণের পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়।

সংখ্যাগুলি কতখানি নিভুর্ল হওয়া আবশ্যক তা স্থির করা গেলেও প্রত্যেক সংখ্যাকে সেই সীমার মধ্যে আনা তত সহজ নয়। তাই অনেক ক্ষেত্রে যতটা নিভুর্ল হিসাব পাওয়া যায় তাই নিয়েই কাজ চালাতে হয়। টেবলে, স্তম্ভের মাথায় বা ফুটনোটে জানিয়ে দিতে হয় যে সঙ্কলিত সংখ্যাগুলি কতখানি নিভুর্ল। যে-রাশি পর্য্যন্ত সংখ্যাটী নিভুর্ল হলে চলে তার পরের রাশি পর্য্যন্ত হিসাবে সন্নিবেশিত করাই ভাল। শেষ নিভুর্ল রাশিটী যদি 'শূন্য' হয় তা হলে সেটী সংযোগ করতে হবে। একটা পাতার দৈর্ঘ্য যদি ৪·৮৭ সেণ্টিমিটার হয় তাহ'লে লেখার সময় ৫·০ সেণ্টিমিটার দৈর্ঘ্য লেখাই রীতি। যদি সংখ্যা থেকে কয়েকটা রাশি বাদ দেওয়া প্রয়োজন হয়, তা হ'লে লক্ষ্য রাখতে হয় যাতে বাকী রাশিগুলি থাকে নিভুর্ল। দশমিকের পর একটা রাশি পর্য্যন্ত নিভুর্ল সংখ্যা রাখতে হ'লে এই রকম দাঁড়ায়—

মূল সংখ্যা	দশমিকের পর এক রাশি পর্য্যন্ত নিভুর্ল
৩৫·২৩০০১	৩৫·২
৩২·২৪৯১৬	৩২·২
২৫·০৫০০২	২৫·১
২৩·৯৪৭৮১	২৩·৯

ভগ্নাংশ যদি অর্দ্ধেকের উপর হয় তা হ'লে পুরা 'এক' বলে ধরতে হয়, আর অর্দ্ধেকের কম হ'লে সম্পুর্ণ বাদ দিতে হয়।

'গলদ' হতে পারে দুই প্রকৃতির—(১) পূরক পর্য্যায়ের (complimentary) আর (২) ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু (cumulative)। একই রেখার দৈর্ঘ্য সম্বন্ধে বিভিন্ন লোকের কাছ থেকে হিসাব নিলে প্রায় যতগুলি লোক বাড়িয়ে বলবে, প্রায় ততগুলি লোক কমিয়ে বলার সম্ভাবনা; একদলের কম হিসাব অপর দলের বেশী হিসাবের সঙ্গে কাটাকাটী হবে। এই গলদটা হ'ল পূরক পর্য্যায়ের। জরিপ করার সময় চেন টেনে ২ জন লোক দূরত্ব মাপে। চেনটাকে টান করে ধরে বা ঢিলে করে ধরে মাপ নেওয়ার সম্ভাবনা প্রায় সমান, তাই মাপে ভুল থাকার সম্ভাবনা কম। কিন্তু, যে চেন ধরে মাপ নেওয়া হচ্ছে সেই চেনের মাপই যদি কিঞ্চিৎ খাটো হয়, তা হ'লে যত দীর্ঘ পথ মাপা যাবে ভুলের বহরও তত বেড়ে যাবে। এখানে মাপের গলদ হ'ল ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু। সাধারণতঃ মেয়েরা বয়স একটু কম করেই বলে; সুতরাং যত বেশী সংখ্যক মেয়ের বয়সের হিসাব নেওয়া যাবে ভুলের পরিমাণও তত অধিক হওয়ার সম্ভাবনা। উদাহরণের সংখ্যা অধিক হলে পূরক পর্য্যায়ের গলদ যদি স্বল্প হয় তাহ'লে তা ধর্ত্তব্যের মধ্যে আনার প্রয়োজন নেই; পক্ষান্তরে, গলদ ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু পর্য্যায়ের হ'লে হিসাবের নির্ভুলতা বিশেষভাবে ব্যহত হয়; মোট হিসাব ও গড় হয় ভ্রমপূর্ণ।

শৃঙ্খলের শক্তি নির্ভর করে দুর্ব্বলতম গ্রন্থির শক্তির উপর। তেমনি সংখ্যা-বিজ্ঞানে মোট সংখ্যার নির্ভুলতা নির্ভর করে সেই সংখ্যার উপর যেটী সবচেয়ে অধিক ভ্রমপূর্ণ। শতাধিক কোম্পানী আয়-ব্যয়ের হিসাব যদি দেয় পাই-পয়সায়, আর, মাত্র একটী কোম্পানী তার হিসাব দেয় হাজার টাকায়, তাহ'লে যখন সব কোম্পানীগুলির মোট আয়-ব্যয়ের হিসাব দাখিল করা হবে তখন হিসাবটা হবে হাজার টাকায়, পাই-পয়সা পর্য্যন্ত নয়। ধর, কোন একটী কোম্পানী তার আয়ের হিসাব দিয়েছে মোট ২,৪০,০০০ টাকা; এখানে বুঝতে হবে যে কোম্পানীটির মোট আয় ছিল প্রকৃত পক্ষে ২,৩৫,০০০ টাকা থেকে ২,৪৫,০০০ টাকার ভেতর একটা কিছু। এখন ধর, বাকী একশতটী কোম্পানীর মোট আয় ছিল ৭৮,৬৩,৪৫২৷৶১০। এর সঙ্গে পূর্ব্বের ২,৪০,০০০ টাকা যোগ করে আমরা

বলতে পারি না যে, সব কোম্পানীর মোট আয় ছিল ৮১,০৮,৪৫২৸/১০।
এখানে সঠিক জবাব হবে—

৭৮,৬৩,৪৫২৸/১০
২,৪০,০০০৲ (কাছাকাছি)

৮১,০৩,০০০৲ (কাছাকাছি)

তেমনি, কয়েকটী বিভিন্ন সংখ্যা যোগ করতে হ'লে, সবচেয়ে বেশী গলদপূর্ণ যে সংখ্যা, সেটীকে আদর্শ ধরে অন্যান্য সংখ্যার অতিরিক্ত রাশিগুলি বাদ দিয়ে যোগ করলে চলবে না, সে ক্ষেত্রে যোগ করতে হবে এই ভাবে—

		ঠিক নয়—
	৫·৩৮৭৫	৫·০০০
	৭·৪৯২৬	৭·০০০
সর্ব্বাধিক ভুল—	৬·০	৬·০০০
	২৩·৪৬৩২	২৩·০০০
	৪২·৩৪৩৩	৪১·০০০
	৪২ (কাছাকাছি)	

দশমিকের পরের রাশিগুলি যদি গোড়াতেই বাদ দেওয়া হ'ত তা হ'লে মোট দাঁড়াত ৪১ এবং তার ফলে ভুল হ'ত এক এককের। প্রত্যেক সংখ্যাটী যেমন আছে তেমনি ধরে নিয়ে যোগ করে 'গলদপূর্ণ' রাশিগুলি বাদ দিতে হবে।

পঞ্চম অধ্যায়

'ডেটা' সঙ্কলন :

কোন্ সূত্র ধরে তথ্য সঙ্কলিত হয়েছে তার উপরেও নির্ভর করে তথ্যের নির্ভুলতা। তথ্য-সংগ্রহের জন্য কোন কোন ক্ষেত্রে নির্ভর করতে হয় বহু লোকের উপর ; আবার কোন কোন ক্ষেত্রে বাছাইকরা কয়েকজনের উপর নির্ভর করলেই চলে। যেমন, লোকগণণার জন্য নির্ভর করতে হয় প্রত্যেক গৃহস্থের উপর। গৃহস্থই জানিয়ে দেন বাড়ীতে কত লোক আছে, কার দেশ কোথায় ইত্যাদি। গৃহস্থের সংখ্যা অজস্র ; সুতরাং লোকগণণার সূত্র বহু এবং বিচিত্র। আমাদের দেশে লোকের শিক্ষা ও বোধশক্তি বিভিন্ন ; তাই প্রশ্নপত্রগুলি এমনভাবে তৈরী করতে হয় যেন ভুল বোঝার সম্ভাবনা কোনরূপ না থাকে। তবু দেখা গেছে যে প্রশ্নটা বোধগম্য হলেও, জবাবটা কিভাবে দিতে হবে তা অনেকেই বুঝতে পারেন না। তাই সেন্সাস গ্রহণের সময় অনুসন্ধানের ক্ষেত্র রাখা হয় অতি সামান্য। এই সামান্য প্রশ্নপত্রের মধ্যেও বোঝার উপায় নেই যে জবাব সঠিক পাওয়া গেছে কি না। ইচ্ছা করে যে লোক ভুল সংবাদ দেয় তা হয় ত নয় ; হয় ত সঠিক জ্ঞান না থাকার দরুণই অনিচ্ছায় বা অজ্ঞাতে ভুল উত্তর দিয়ে থাকে। সুতরাং বলা যায় যে চূড়ান্ত (final) তথ্যের নির্ভুলতা নির্ভর করে যে-সব বিভিন্ন সূত্র ধরে তথ্য সঙ্কলিত হয়েছে তাদের সংখ্যার উপর।

পক্ষান্তরে, তথ্য সংগ্রহের সূত্র-সংখ্যা স্বল্প হতে পারে। তথ্য সংগ্রহের ভার মাত্র কয়েকজন নিপুণ সন্ধানীর হাতেই থাকতে পারে। এই সব সন্ধানী হয় ত আবার তথ্য সংগ্রহ করতে পারেন অপরের কাছ থেকে ; কিন্তু তাঁদের বিশেষ জ্ঞান আছে বলে তাঁরা প্রশ্ন করে, জেরা করে জেনে নিতে পারেন তথ্যটা কতখানি গ্রহণযোগ্য। জবাব যখন পান বর্ণণাত্মক শব্দে, তখন সেই বর্ণণাত্মক শব্দের একটা মোটামুটি ঠিক সংজ্ঞা করে নেওয়া তাঁদের পক্ষে যতটা সম্ভব, সাধারণ লোকের পক্ষে তা নয়। যেমন,

শিশুকল্যাণ প্রতিষ্ঠান মাঝে মাঝে স্কুল-কলেজের ছাত্রদের স্বাস্থ্য পরীক্ষা করে। রিপোর্টে ডাক্তার হয়ত মন্তব্য করেন—"সাধারণ", "ভাল", "মন্দ" ইত্যাদি। ডাক্তার মন্তব্য করলে বলা যায় যে মন্তব্যটা মোটা-মুটী ঠিক এবং একই ধরণের। কিন্তু রিপোর্টে ছাত্র বা ছাত্রের অভিভাবকের মত, যদি মন্তব্য হিসাবে লেখা হ'ত তাহ'লে বলা যেত না যে প্রদত্ত তথ্যগুলি মোটামুটী ঠিক।

অনুসন্ধান চালান যেতে পারে চার ভাবে—(১) ব্যক্তিগত অনুসন্ধান; (২) পত্রলেখকদের দেওয়া হিসাবপত্র; (৩) সংবাদদাতাদের দিয়ে প্রশ্নপত্র পূরণ; এবং (৪) গণণাকারীদের হাতে প্রশ্নপত্র। এই চতুর্ব্বিধ উপায়ের কোন্‌টা অবলম্বন করা হবে তা নির্ভর করে কতটা নির্ভুল হিসাব চাইছি তার উপর। কোন বিষয়ে গভীরভাবে অনুসন্ধান চালাতে হলে ব্যক্তিগত অনুসন্ধানই শ্রেষ্ঠ। ল্য প্লে'র (Le play) গবেষণা এ বিষয়ে প্রকৃষ্ট উদাহরণ শ্রমজীবীদের আয়-ব্যয় সম্বন্ধে অনুসন্ধানই ছিল তাঁর বিষয়। ক. ? মাস ধরে একই পরিবারের মধ্যে বসবাস করে পরিবারটীর আয়-ব্যয় লক্ষ্য করেন; বহু পরিবারের মধ্যে পর পর এইভাবে বাস করেন। যে সংখ্যাতথ্য এইভাবে তিনি সংগ্রহ করেন তা স্বভাবতঃই ছিল নির্ভুল; কিন্তু নির্দ্দিষ্ট একটা সময়ের মধ্যে এইভাবে তথ্য সংগ্রহ করা মাত্র স্বল্প কয়েকটী পরিবার সম্বন্ধেই সম্ভব। এই ধারার আলোচনায় গবেষণার ক্ষেত্র এতই সঙ্কীর্ণ যে সংগৃহীত তথ্যগুলি সমগ্রের প্রতীক বলে ধরে নেওয়াও চলে না। সারাজীবন অনুসন্ধান চালিয়েও ল্য' প্লে বহু পরিবার সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করতে পারেন নি। ব্যক্তিগত অনুসন্ধান অধিকতর নির্ভুল হ'লেও, অনুসন্ধানের ক্ষেত্র রাখতে হয় এতই সীমাবদ্ধ যে সমগ্রের প্রতীক হিসাবে তাকে ধরে নেওয়া যায় না। অধিকন্তু, ব্যক্তিগত দৃষ্টিভঙ্গীও অনুসন্ধানকে একদেশী করতে পারে।

মোটামুটী ফল পেলেই যখন চলে তখন পত্রলেখকদের হিসাবের উপর নির্ভর করা হয়। শস্যসংক্রান্ত রিপোর্ট সাধারণতঃ এই উপায়েই সঙ্কলিত হয়। ব্যক্তি বিশেষের রিপোর্টে ভুলচুক থাকা সম্ভব; তবে, রিপোর্টে কমিয়ে-বলার সম্ভাবনা যতখানি, বাড়িয়ে-বলার সম্ভাবনাও ততখানি। তাই রিপোর্ট যদি বহু লোকের কাছ থেকে পাওয়া যায়,

ভুলচুক কাটাকাটী হয়ে গিয়ে ফল দাঁড়ায় মোটামুটী ঠিক্। এরই একটা রকম-ফের হ'ল এজেন্ট পাঠিয়ে হিসাব সংগ্রহ করা।

তৃতীয় উপায় হ'ল সংবাদদাতাদের (informer) দিয়ে প্রশ্নপত্র পূরণ। পত্রলেখকদের সঙ্গে সংবাদদাতাদের তফাৎ এই যে, প্রশ্নসম্বন্ধে সংবাদদাতাদের সঠিক জ্ঞান থাকে। পত্রলেখকদের উপর নির্ভর করার যা দোষ তা এতেও বর্ত্তমান। রাষ্ট্র বা রাষ্ট্রের কাছ-থেকে-ক্ষমতা-পাওয়া কোন প্রতিষ্ঠানের কাছ থেকে তাগিদ না এলে বেশীর ভাগ প্রশ্নপত্রই আর ফেরৎ আসে না। যাও বা ফেরৎ আসে তাও থাকে প্রায়ই অসম্পূর্ণ বা ভ্রমপূর্ণ। প্রশ্নগুলি সহজ হ'লে অপেক্ষাকৃত সঠিক উত্তর পাওয়ার সম্ভাবনা। প্রশ্নের উত্তর দেওয়া সম্বন্ধে সাধারণতঃ সংবাদদাতাদের (informants) অজ্ঞতা অদ্ভুত; তাই গণণাকারীদের হাতে যে ধরণের প্রশ্নপত্র দেওয়া যেতে পারে তার চেয়েও সরল ও সহজভাবে প্রশ্নপত্র তৈরী করতে হয় এদের জন্য। প্রশ্নপত্রে জানিয়ে দেওয়া প্রয়োজন কারা এবং কি উদ্দেশ্যেই বা এই তথ্য সংগ্রহ করছেন, তা নইলে সংস্কার ও সন্দেহের বশে সংবাদ-দাতাদের কাছ থেকে কোনরূপ জবাব না পাওয়াই সম্ভব। প্রশ্নপত্র তৈরী হওয়া উচিত বর্ত্তমান সমস্যা নিয়ে, কেননা, অতীত সম্বন্ধে তথ্য এদের কাছ থেকে পাওয়া দুরাশা। এই প্রক্রিয়ায় তথ্য সংগ্রহের সুবিধা এই যে অল্প খরচায় হয়।

সরকার প্রবর্ত্তিত অনুসন্ধানে সাধারণতঃ নিযুক্ত করা হয় গণণাকারী। অর্থসাপেক্ষ বলে ব্যক্তিবিশেষের পক্ষে এই ধারায় অনুসন্ধান চালান সহজ নয়। গণণাকারীদের জন্য যে প্রশ্নপত্র তৈরী হবে তা ব্যাপক হ'তে পারে, তবে দেখা দরকার যে প্রশ্নপত্রটী আকারে যেন এমন হয় যে গণণাকারীর পক্ষে নাড়াচাড়া করা সহজ হয়। যদি আকারে বৃহৎ হয় তাহ'লে ভাঁজ খুলতে ও ভাঁজ করতে প্রশ্নপত্রটি নষ্ট হয়ে যাওয়াই সম্ভব। প্রশ্নপত্রে রুল এমন ভাবে করা চাই ও তাদের মধ্যে এ রকম স্থান থাকা চাই যাতে সারি বা স্তম্ভ ধরে চোখ সহজেই চলাফেরা করতে পারে। গুরুত্ব হিসাবে ছোট বড় টাইপ সাজিয়ে শিরোনামা, অনুশিরোনামা লেখা দরকার। হেডিং, ফর্ম্ ও টাইটল্ (Heading, Form ও Title) এরূপ সহজ হওয়া আবশ্যক যাতে

সাধারণ বুদ্ধির লোকও সহজেই অর্থ গ্রহণ করতে পারে। সুতরাং দ্ব্যর্থবোধক শব্দ থাকা উচিৎ নয়।

প্রশ্নপত্রের জবাব যখন সংবাদদাতার মর্জ্জির উপর নির্ভর করে তখন প্রশ্নগুলি হওয়া আবশ্যক সরল, অল্প-সংখ্যক ও সহজ; তা নইলে, বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই জবাব পাওয়া যাবে না। আইনের বলে যদি লোককে প্রশ্নের জবাব দিতে বাধ্য করা সম্ভব হয় তাহ'লে প্রশ্নপত্র কিছুটা জটিল করা চল্‌তে পারে, তবে সেগুলি এতখানি জটিল হওয়া উচিত নয় যাতে মুদ্রিত নির্দ্দেশনামা দেখেও গণণাকারীর পক্ষে সঠিক ব্যাখ্যা করা সম্ভব না হয়। গণণাকারী নিজে যদি প্রশ্ন সম্বন্ধে ওয়াকিবহাল হন, তাহ'লে আনুষঙ্গিক নানা প্রশ্ন করে প্রশ্নের সঠিক জবাব আদায় করে নিতে পারেন। সব সময়ে মনে রাখা দরকার যে, বেশী প্রশ্নের মানেই হল বেশী ব্যয় এবং টেবল্ তৈরীর জন্য অতিরিক্ত শ্রম। তাই প্রশ্নপত্র তৈরী করতে হয় তহবিলের দিকে নজর রেখে। অবান্তর প্রশ্ন বর্জ্জন করে সন্নিবেশিত করতে হবে অপরিহার্য্য প্রশ্নগুলি। সংগৃহীত তথ্য থেকে নির্ঘণ্ট তৈরী করতে হলে প্রশ্নগুলি এমন ভাবে তৈরী করতে হয় যাতে জবাব শুধুমাত্র "হ্যাঁ" বা "না" বা সংখ্যায় ব্যক্ত করা যায়। দেখ্‌তে হয় যে প্রশ্নগুলি যেন এমন না হয় যা শুনে উত্তরদাতার মনে বিরক্তি উদ্রেক করে বা তার সংস্কারে আঘাত লাগে, কেননা, তাহ'লে সঠিক জবাব পাওয়ার সম্ভাবনা ছেড়ে দিতে হবে। প্রশ্নগুলি দ্ব্যর্থবোধক হলেও চলবে না। অতএব সংক্ষেপে বলা যায়—

প্রশ্নগুলি যেন—

(১) সংখ্যায় অল্প হয়

(২) এমন হয় যার উত্তরে বলা যায় "হ্যাঁ" বা "না" অথবা একটী সংখ্যা।

(৩) সহজবোধ্য হয়

(৪) এমন হয় যার উত্তর পক্ষপাত দুষ্ট (bias) হবেনা

(৫) অযথা কৌতুহলী না হয়

(৬) যতদূর সম্ভব সমর্থিত (Corroboratory) হয়

অনুসন্ধানের ঔৎকর্ষ্য অনেক অংশে নির্ভর করে গণণাকারীর চরিত্রের উপর।

গণণাকারীর থাক চাই তীক্ষ্ণবুদ্ধি। যে অস্পষ্ট উত্তর পাওয়া যায় তাকে গ্রহণযোগ্য করে নিতে হয় গণণাকারীকে। শুধু তীক্ষ্ণবুদ্ধি থাকলেই চলবে না, গণণাকারীকে হতে হবে পরিশ্রমী ও কর্ত্তব্যনিষ্ঠ। তাঁর চরিত্রের মধ্যে যদি থাকে শঠতা তাহ'লে পরিশ্রম এড়াবার জন্য মনগড়া উত্তর লিখে প্রশ্নপত্র পূরণ করা কিছুই বিচিত্র নয়। বিনয়ী ও কলা-কুশলীও তাঁর হওয়া আবশ্যক।

ষষ্ঠ অধ্যায়

নমুনা-ধরে গবেষণা (Sample Survey) :

কোন একক-সমষ্টি সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করাই সংখ্যা-বিজ্ঞান-সম্মত অনুসন্ধানের কাজ, তা সেই সমষ্টি সজীব বা নির্জীব বিষয় সংক্রান্ত হউক না কেন, অর্থাৎ, লোক বা পশু বা ক্ষেত-খামার বা শস্য বা কলকারখানা প্রভৃতি যে কোন বিষয় সম্পর্কে হউক না কেন। সমষ্টি সম্বন্ধে আবশ্যকীয় তথ্য সংগ্রহই হচ্ছে সমস্যা। সমগ্র সমষ্টি সম্বন্ধে অনুসন্ধান চালান যেতে পারে; অথবা সেই সমষ্টির একটা অংশ সম্বন্ধে অনুসন্ধান চল্‌তে পারে। সমগ্র সমষ্টি সম্বন্ধে অনুসন্ধান চালালে বলা হয় 'সেন্সাস' নেওয়া হচ্ছে; আর সমষ্টির অংশ সম্বন্ধে অনুসন্ধান চালালে বলা হয় 'নমুনা' নেওয়া হচ্ছে। সমষ্টির সমস্ত একক সম্বন্ধে তথ্য সেন্সাসে সংগ্রহ করা হয় বলে, সংগৃহীত তথ্যের উপর নির্ভর করে যখন কোন সিদ্ধান্ত করি, তখন ভুল হবার আশঙ্কা মনে আসে না। কিন্তু নমুনার উপর নির্ভর করে যখন কোন সিদ্ধান্ত করি তখন সেই সিদ্ধান্ত নমুনা সম্পর্কেই প্রযোজ্য। নমুনা সংক্রান্ত সিদ্ধান্তকে যদি সাধারণ সিদ্ধান্তের পর্য্যায়ে ফেল্‌তে চাই তা হ'লে দেখা দরকার যেন নমুনাটীকে সমগ্র সমষ্টির প্রতীক হিসাবে গ্রহণ করা যায়। লোকবল সেন্সাসে সমষ্টির অন্তর্গত প্রত্যেকটী লোককেই গণণার মধ্যে আনা হয়। এই পদ্ধতিতে অনুসন্ধান চালালে সময় ও শ্রম ব্যয় হয় প্রচুর। সুতরাং খরচারও অন্ত থাকে না। অনুসন্ধান চালাবার পূর্ব্বে তিনটী বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য দিতে হয়। প্রথমতঃ, তথ্য-সংগ্রহের প্রয়োজনীয়তা কতখানি; দ্বিতীয়তঃ, সংগৃহীত তথ্য নিয়ে আলোচনা যাঁরা চালাবেন তাঁদের হাতে সেই তথ্য গিয়ে পৌছনর আবশ্যকতা কতখানি; এবং তৃতীয়তঃ, তথ্য সংগ্রহ করার, পরস্পর মিলিয়ে দেখার (collating) ও প্রকাশ করার ব্যয় কতখানি। লোকবলসংক্রান্ত সেন্সাস গ্রহণ করা হয় দশ বৎসর অন্তর-অন্তর এবং প্রকাশিত তথ্য সাধারণের হাতে এসে

পড়ে বেশ কিছুকাল পরে। পক্ষান্তরে, আমদানী-রপ্তানী সংক্রান্ত তথ্য পাওয়া যায় ২।১ মাসের ভিতরই। এইভাবে তাড়াতাড়ি তথ্য-সঙ্কলনের জন্য বহুসংখ্যক কাষ্টাম্ অফিসিয়াল নিযুক্ত রাখতে হয়।

নমুনা-ধরে (স্যাম্পল্ সার্ভে) অনুসন্ধান চালানর দুইটী ধারা আছে। প্রথম ধারায় অনুসন্ধানকারীর কোন হাত থাকে না নমুনা নির্ব্বাচনে; আর দ্বিতীয় ধারায় অনুসন্ধানকারী নিজেই ঠিক্ করে নেন কোন্ বিশেষ এককগুলিকে নমুনা হিসাবে ধরা হবে; এবং তথ্য-সংগ্রহ করাও হয় একমাত্র সেই নমুনা সম্বন্ধেই। এই দ্বিতীয় পদ্ধতিতে তখনি অনুসন্ধান চালান যায় যখন যে-সমষ্টি সম্পর্কে নমুনা চয়ন করা হবে সেই সমষ্টির সীমা নির্দ্দেশ করে দেওয়া আছে। এরূপ ক্ষেত্রে অনুসন্ধানকারী নমুনা স্থির করেন যদৃচ্ছাক্রমে এবং অনুমান করে নেওয়া হয় যে ঐ নমুনাই হবে সমগ্রের প্রতীক। সুতরাং, নমুনা কি হবে তা অনেকখানি নির্ভর করে দৈবের উপরে (chance)। প্রথম ধারার অনুসন্ধানে নমুনার উপর অনুসন্ধানকারীর কোন কর্ত্তৃত্ব থাকে না; যে নমুনা দেওয়া হয়েছে তা সমগ্রের প্রতিনিধিমূলক কিনা তা জানবারও তাঁর উপায় নেই।

একক (Unit) :

সংখ্যা-বিজ্ঞানে যে সব তথ্য সংগ্রহ করা হয়, তা হচ্ছে কোন-না-কোন একক সম্পর্কে; এবং এই একক-সমষ্টিই হ'ল আলোচনার বিষয়-বস্তু। লোক, গৃহ, গরু, ছাগল, জাহাজ, পণ্য প্রভৃতি যে-কোন বিষয়ই এককরূপে ব্যবহৃত হতে পারে। প্রত্যেক এককের থাকে কয়েকটী বৈশিষ্ট্য, লক্ষণ বা গুণ; আবার এই বৈশিষ্ট্যগুলির তারতম্য থাকতে পারে। বিভিন্ন এককের বিভিন্ন ধরণের বা পরিমাণের বৈশিষ্ট্য থাকে বলে একটী একককে অপরটী থেকে পৃথক করতে পারি; বৈশিষ্ট্যগুলির সংখ্যাও কম নয়। কোন কোন বৈশিষ্ট্যের পরিমাণ করা যায়; আবার কোনগুলি বা বর্ণণাসাপেক্ষ। যেমন, কোন সমষ্টির "একক" হতে পারে—২২ বৎসরের একজন পুরুষ, লম্বায় ৫ ফিট ৪ ইঞ্চি, দেড়মন ওজনে, কেরাণীর কাজ করে, বস্তিতে বাস করে, মাইনে পায় ৬০ টাকা, বিবাহিত, নিঃসন্তান, টানা চোখ, মাথায় কোঁকড়া চুল ইত্যাদি। এই সব বৈশিষ্ট্যের সমষ্টি লোকটীর স্বরূপ বুঝিয়ে দেয় এবং স্বরূপনির্দ্দেশক বৈশিষ্ট্যের সমষ্টিই হল

একটী "একক"। এই উদাহরণ থেকেই বোঝা যাবে লক্ষণ, বৈশিষ্ট্য বা গুণ বললে কি বোঝায় এবং বর্ণনা করে (যেমন, চুলের কুঞ্চন) বা সংখ্যা দিয়েই (যেমন, উচ্চতা) বা কি ভাবে বৈশিষ্টগুলি ব্যক্ত করা যায়। বিশেষ বিশেষ অনুসন্ধানে বিশেষ বিশেষ বৈশিষ্ট্যের উপর নজর থাকে। যেমন, আয় সম্পর্কিত আলোচনায় দৃষ্টি থাকে আয়ের উপর। সুতরাং কোন অনুসন্ধানে প্রথমেই ঠিক করে নিতে হয় এককের সংজ্ঞা ও সীমা।

মনে হতে পারে যে একক স্থির করা সহজ, কিন্তু কার্য্যক্ষেত্রে ঠিক তত সহজ হয় না। উদাহরণ দিয়ে বলি। ধর, ভারতের লোকবলের সেন্সাস নেওয়া হচ্ছে। লোকগণণার জন্য ধরা হল "গৃহস্থ"কে একক-রূপে; আর, লোক সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হবে গৃহকর্ত্তার কাছ থেকে। সুতরাং স্থির হ'ল প্রত্যেক গৃহস্থকে সেন্সাস সংক্রান্ত প্রশ্নপত্র দেওয়া হবে। মনে হতে পারে কাজটা খুব সহজ; যে-কোন-লোক রাস্তা ধরে বাড়ী বাড়ী গিয়ে প্রশ্নপত্র বিলিয়ে আসতে পারেন। কাজটা কিন্তু কর্ম্মচারিটির কাছে খুব সহজ মনে হবেনা। ধর, একটা বাড়ীতে আছে দুটী পরিবার। কর্ম্মচারিটী কি করবে এখানে? দুটী পরিবারকে দুটী গৃহস্থ বলে গণ্য করবে, না, একই বাড়ীতে আছে বলে একই গৃহস্থ ধরবে? সুতরাং, "গৃহস্থ" বলতে কি বোঝায় সে সম্বন্ধে পরিষ্কার নির্দ্দেশ থাকা প্রয়োজন; অর্থাৎ "একক"-এর সংজ্ঞা স্থির থাকা আবশ্যক। আবার ধর, "পেশা" সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হচ্ছে। চাষের কাজ যে সময় থাকে না সে সময় কোন চাষী মাটি কেটে উপার্জ্জন করে। তাহ'লে ঐ চাষীটির পেশা কি? মাটী কাটা, না, চাষ? সুতরাং "পেশা" শব্দের (বৈশিষ্ট্যের) সংজ্ঞাও পূর্ব্বেই স্থির করে নেওয়া প্রয়োজন। এই দুই উদাহরণ থেকে বোঝা যাবে এককের সংজ্ঞা সঠিক ও সুস্পষ্ট হওয়া কত প্রয়োজন। যে সময় বা স্থানকে ঘিরে তুলনামূলক আলোচনা করা হবে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই তার একক একই হওয়া আবশ্যক। এককের বিবরণ এরূপ স্পষ্ট ভাষায় ব্যক্ত করা উচিত এবং সংজ্ঞার প্রত্যেক খুঁটিনাটী এরূপ সহজভাবে ব্যক্ত করা কর্ত্তব্য যে তথ্যসংগ্রাহক নির্দ্দেশগুলি সহজেই বুঝে নিতে পারেন। অতি সাধারণ বুদ্ধির লোকের হাতেই থাকে তথ্য-সংগ্রহের

ভার ; তাই, কোন নির্দ্দেশ যদি দ্ব্যর্থবোধক হয় তাহ'লে বিশৃঙ্খলা না এসেই পারে না। শুধু সংজ্ঞা স্থির করলেই হল না, একক এরূপ হওয়া আবশ্যক যেন সহজেই নির্ভুলভাবে নিরূপণ করা যায়। ধর, অনুসন্ধান করা হচ্ছে শিক্ষার প্রসার সম্বন্ধে। যদি "শিক্ষিত-ব্যক্তি"-কে একক বলে ধরা যায় তাহ'লে গোলমাল হওয়ার সম্ভাবনা ষোলআনা ; কেননা, এককের সংজ্ঞা এরূপভাবে দেওয়া যায় না যাতে একমাত্র "শিক্ষিতব্যক্তি"-কেই বোঝায় এবং ঐ সংজ্ঞা অনুসরণ করে লোক-সমষ্টিকে ঐ পর্য্যায়ভুক্ত করা যায়। একক-কে পরিমাণ করা গেলে সহজেই শ্রেণীবদ্ধ করা চলে।

সপ্তম অধ্যায়

শ্রেণী-বিভাগ (Classification) :

সংগৃহীত তথ্যই হ'ল সংখ্যা-বিজ্ঞানের মাল-মশলা। এই সব মাল-মশলাকে কাজে লাগাতে হ'লে দেখতে হয় যে সেগুলি নির্ভুল কিনা। নির্ভুলতা পরীক্ষায় ভুল-ভ্রান্তি নজরে এলে সেগুলিকে প্রথমে সংশোধন করে নিতে হয়। তথ্যগুলি গ্রহণযোগ্য হলে প্রয়োজন হয় সেগুলিকে সমবেত করা এবং সংক্ষেপ করা। হাজার পাতার, কি একশত পাতার পুঁথির মধ্যে সংরক্ষিত তথ্যগুলি নিমিষে বুঝে ফেলা বা স্মরণে রাখা কারো পক্ষেই সম্ভব নয়। তাই সেই তথ্যের সংক্ষিপ্ত সার-সঙ্কলন প্রয়োজন। এবং তার ফলেই পাওয়া যায় টেবল্। টেবল্ তৈরী করতে হলে 'একক'-গুলিকে বিভিন্ন শ্রেণীতে সাজাতে হয়। কি ধরণের তথ্য সংগৃহীত হয়েছে তার উপরেই নিভর করে টেব্‌লের ধরণ ও শ্রেণী-বিভাগ। সমবেতকরণ ও সংক্ষেপকরণ প্রক্রিয়ার ফলে যে সকল এককের মধ্যে কয়েকটা লক্ষণের পরিচয় পাওয়া যায় তাদের ফেলা হয় একই শ্রেণীর মধ্যে; একক স্বকীয়তা হারায় সমষ্টির মধ্যে। যেমন, লোকবল সেন্সাসের মধ্যে কোন লোকই তার নিজের অস্তিত্বের বিশেষ পরিচয় খুঁজে পায় না, অথচ তার মধ্যেই থাকে তার পরিচয়।

সদৃশের সঙ্গে সদৃশের যোগসাধনই হ'ল শ্রেণী-বিভাগ।

এককের বৈশিষ্ট্যের উপরই নির্ভর করে শ্রেণী-বিভাগ। এই বৈশিষ্ট্যগুলিকে ভাগকরা যায় দুই শ্রেণীতে—

(১) যে-গুলিকে বলা যায় বর্ণণা-মূলক ; আর

(২) যে-গুলিকে বলা যায় সংখ্যা-মূলক, অর্থাৎ প্রকাশ করা যায় সংখ্যায়। যৌন, উপজীবিকা প্রভৃতি বৈশিষ্ট্যগুলি বর্ণণা-মূলক ; আর, বয়স, উচ্চতা, আয় প্রভৃতি বৈশিষ্ট্যগুলি হ'ল সংখ্যা-মূলক। কোন কোন ক্ষেত্রে বর্ণণা-মূলক বৈশিষ্ট্য ধরে সহজেই শ্রেণী-বিভাগ করা চলে। যৌন-বৈশিষ্ট্য দেখে বলা যায় পুরুষ, কি নারী, কি নপুংসক শ্রেণীর। চালকশক্তি দেখে জাহাজগুলির শ্রেণী বিভাগ করা যায়—বাষ্পচালিত, পালচালিত বা তৈলচালিত। কতকগুলি বৈশিষ্ট্য আবার এমন যে সেগুলি দেখে শ্রেণী-বিভাগ দুঃসাধ্য হয়ে পড়ে।

এই ধরণের বৈশিষ্ট্যগুলির এত রকমের স্তরভেদ থাকে যে কোন্‌টাকে কোন্‌ শ্রেণীতে ফেল্‌ব সে বিষয়ে খট্‌কা লাগে। যেমন, চোখের রঙ। চোখের রঙের হয়ত দুই শ্রেণী-বিভাগ কর্‌লুম—ব্রাউন ও নীল। কিন্তু, এই দুই রঙের বহু স্তরভেদ আছে; যেমন, ফিকে ব্রাউন. ফিকে নীল, গভীর নীল, সবুজ পাংশু প্রভৃতি; কোন্‌ শ্রেণীতে কাকে ফেল্‌ব তা নিয়ে সহজেই মতভেদ হয়; এমন উদাহরণও পাওয়া যায় যাকে এই দুই শ্রেণীর কোনটার মাঝেই ফেলা যায় না। ভেদ যখন থাকে মৌলিক তখনি সদৃশকে সদৃশের সঙ্গে সংযুক্ত করা সহজ হয়, তা নাহ'লে কাছাকাছি-মিল থাকলেই এককগুলিকে ফেলা হয় একই শ্রেণীর মধ্যে। যে-বৈশিষ্ট্যগুলিকে সংখ্যায় ব্যক্ত করা যায় সেগুলি সম্বন্ধেও এই ধরণের মুস্কিল দেখা দেয়। গাড়ীর সংখ্যা হিসাবে মাল-গাড়ীর শ্রেণী-বিভাগ সহজ; কিন্তু মজুরী হিসাবে মজুরের শ্রেণী-বিভাগ তত সহজ নয়। কেবলমাত্র গণণার উপর শ্রেণী-বিভাগ যেখানে নির্ভর করে সেখানে শ্রেণী-বিভাগ সহজ; কিন্তু, পরিমাণের উপর শ্রেণী-বিভাগ যেখানে নির্ভর করে সেখানে তা সহজ হয় না।

টেবল্‌ তৈরী (Tabulation):

টেব্‌লে থাকে সংগৃহীত তথ্যের সারমর্ম্ম; সুতরাং, যে সব তথ্য সংগৃহীত হয়েছে তার মধ্যে যেটুকু বর্ত্তমান সমস্যার আলোচনায় কাজে লাগে সেটুকু বাছাই করে নিতে হয়। তবে সংগৃহীত মৌলিক তথ্যগুলি নষ্ট করে না ফেলে যত্নের সঙ্গে সংরক্ষণ করা হয় ভবিষ্যৎ সমস্যার আলোচনার সহায়ক টেবল্‌ তৈরী করার জন্য। অনুসন্ধানের ফলাফল সাধারণের গোচরে আসে টেব্‌লের আকারে; তাই টেব্‌লে গ্রথিত তথ্যগুলি হওয়া আবশ্যক সুস্পষ্ট ও যথাযথ। অর্থাৎ যেসব বিষয়ের দ্ব্যর্থক ব্যাখ্যা হতে পারে তাদের সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা থাকা প্রয়োজন টেব্‌লে।

টেবল্‌ ও স্তম্ভের শিরোনামা এরূপ ভাষায় লেখা প্রয়োজন যাতে সহজেই বোঝা যায়। স্তম্ভের মাথায় লেখা দরকার পরিমাপ কি এবং একক কি। কাগজের আকার অনুযায়ী সারি ও স্তম্ভগুলি সাজাতে হয়। টেব্‌লে যেসব সংখ্যা সন্নিবেশ করা হয় সেগুলি যাতে নির্ভুল হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হয়।

টেব্লগুলিকে আবার দুই শ্রেণীতে ভাগ করা যায়—সরল ও জটিল। সরল টেব্লে থাকে একটীমাত্র বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে তথ্য : অন্যান্য বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে তথ্য সন্নিবেশিত করা হয় না। আর, জটিল টেব্লে থাকতে পারে একাধিক বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে তথ্য। যে-সব বৈশিষ্ট্য এককগুলির মধ্যে সমমাত্রায় পাওয়া যায় তাদেরই পরিচয় থাকে শিরোনামায়। যথা—

টেবল্—নং ১

১৯৪৮শে বিবাহিত পুরুষের বয়স—বাংলাদেশে

বয়স	২১শের কম	২১-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪৫	৪৫-৫৫	৫৫র বেশী	মোট
সংখ্যা	৫০০	৫০০	২,০০০	৪,০০০	১,০০০	৫০০	৫০০	৯,০০০

এই টেব্লে ৯,০০০ লোকের বৈশিষ্ট্য কি দেখছি? তারা সকলেই পুরুষ, সকলেই বিয়ে করেছে ১৯৪৮ সালে এবং বাংলা দেশে। সুতরাং যারা বাংলা দেশে বিয়ে করেনি, যারা ১৯৪৮শে বিয়ে করেনি এবং যারা নারী তাদের থেকে পৃথক করে এদের বেছে নেওয়া যায়। পক্ষান্তরে, দেখছি যে সকলের বয়স এক ছিল না। টেব্লে শ্রেণী-বিভাগ করা হয়েছে বয়স ধরে; যাদের বয়স প্রায় একই ধরণের তাদের ফেলা হয়েছে একই ঘরে; যেমন, ২৫ থেকে ৩০শের ভিতর যাদের বয়স তাদের ফেলা হয়েছে একই ঘরে এবং তাদের সংখ্যা হল ২০০০। উপরে যে বৈশিষ্ট্যগুলির কথা উল্লেখ করেছি, সেগুলি ছাড়াও এই নয় হাজার লোকের আরো বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য আছে—যেমন, "পেশা", "উচ্চতা", "চুলের রঙ", 'আয়' প্রভৃতি বিভিন্ন বিষয়ে। এই সব বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের কোন হদিশ এই টেব্লে নেই। অতিরিক্ত বৈশিষ্ট্যগুলির পরিচয় টেব্লে সন্নিবেশিত করতে হলে, বৈশিষ্ট্য-গুলি নজরে রেখে প্রত্যেক সমষ্টিকে ক্ষুদ্রতর শ্রেণীতে ভাগ করা প্রয়োজন। বয়স ও পেশা সন্নিবেশিত করে উপরের টেব্ল থেকে নীম্নরূপ নতুন টেবল্ তৈরী করা যায় (টেবল্ নং ২)। এই ধরণের বহু জটীল টেবল্ তৈরী করা সম্ভব। টেব্লের শিরোনামা দেখে বোঝা যায় সমষ্টির অন্তর্গত একক-গুলির কি কি বৈশিষ্ট্যগত সাদৃশ্য আছে।

টেবল্—নং ২

১৯৪৮ শে বিবাহিত পুরুষের বয়স ও পেশা—বাংলাদেশে

	বয়স	২১শের কম	২১-২৫	২৫-৩০	৩০-৪৫	৪৫-৫৫	৫৫-র উপর	মোট
কোন্ শিল্পে নিযুক্ত	চাষ	১০০	১৫০	১০০	১,৫০০	৫০	৩০০	২,৩০০
	খনি	১৫০	১০০	১০০	৬০০	৫০	১০০	১,২০০
	লৌহ শিল্প	৫০	১৫০	১০০	৬০০	৫০	৫০	১,১০০
	বয়ন শিল্প	১৫০	৫০	৫০০	৬০০	৩০০	২৫	১,৬২৫
	অন্যান্য	৫০	৫০	৯০০	১,৭০০	৫০	২৫	২,৭৭৫
	মোট	৫০০	৫০০	২,০০০	৫,০০০	৫০০	৫০০	৯,০০০

কোন বিশেষ একটী বৈশিষ্ট্যকে লক্ষ্য করে যদি টেবল্ তৈরী করা হয় ও শ্রেণীর সংখ্যা অনেক থাকে তাহ'লে কাগজের আকারের উপর নির্ভর করে কতটা তথ্য সন্নিবেশিত হবে। কিন্তু শ্রেণী-বিভাগ অল্প হলে বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে তথ্য সন্নিবেশ করা সম্ভব। যেমন, বিদ্যালয়ের ছাত্রদের ভাগ করা চলে পুরুষ ও নারীতে, দিনের ছাত্র ও রাতের ছাত্রে, প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় বা চতুর্থ বার্ষিক শ্রেণীর ছাত্রে। এইসব বৈশিষ্ট্য নিয়ে টেবল্ তৈরী সম্ভব।—

টেবল্—নং ৩

বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা

	দিনের ছাত্র			রাতের ছাত্র		
	পুরুষ	নারী	মোট	পুরুষ	নারী	মোট
প্রথম বার্ষিক শ্রেণী	৫২	২০	৭২	৪৯	৩৫	৮৪
দ্বিতীয় বার্ষিক শ্রেণী	৪৮	২২	৭০	৬০	১৫	৭৫
তৃতীয় বার্ষিক শ্রেণী	৫০	১৮	৬৮	৩০	১১	৪১
চতুর্থ বার্ষিক শ্রেণী	৪০	১৫	৫৫	২৫	১৩	৩৮
মোট	১৯০	৭৫	২৬৫	১৬৪	৭৪	২৩৮

গভর্ণমেণ্ট প্রকাশিত তথ্য-তালিকায় প্রায় এই ধরণেরই টেবল্ থাকে। বিশেষ-বৈশিষ্ট্যসম্বলিত অনুরূপ এককগুলিকে সমষ্টিবদ্ধ করার জন্য যে শ্রেণী-বিভাগ করা হয়, তারই উপর অনেক অংশে নির্ভর করে টেবল্ প্রণয়ণ। টেবল্ কি ধরণের হবে তা অনেক অংশে নির্ভর করে যারা টেবল্ তৈরী করে তাদের উপর, অর্থাৎ টেবল তৈরী হয় কোন বিশেষ সমস্যা বা বিষয় সমাধানের উদ্দেশ্যেই। যেমন, নীচের টেবলে (টেঃ নং ৪) পাওয়া যাবে মৃত্যুর সময় বয়সের হিসাব; অর্থাৎ, ১৯৩৫ সালে বাংলাদেশে কোন্ বয়সের কতলোক মরেছে তার হিসাব।

টেবল্—নং ৪

বয়স হিসাবে মৃত্যু-সংখ্যা—বাংলাদেশে, ১৯৩৫

বয়স	১-এর কম			১৫-২০	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	[illegible]এর ঊর্দ্ধ
সংখ্যা	৩৬	২২	৮৫	৫৫,৯২২	[illegible],২৫,২৪৫	[illegible],০২,৮৭৫	৮৯,৮০৩	৮২,৮২২	

কিন্তু শিশু-মৃত্যু হার জানাই যদি আমাদের উদ্দেশ্য হয় তাহ'লে এ ধরণের শ্রেণী-বিভাগে কোন সুবিধা হবে না, তার জন্য হয়ত তৈরী করতে হবে নীচের মত একটা টেবল্।

টেবল্—নং ৫

১ বছরের কম বয়সের শিশুর মৃত্যু-সংখ্যা

বয়স (মাসে)	১-এর কম	১—৩	৩—৬	৬—৯	৯—১২	মোট
সংখ্যা	২৬,৮১০	১০,৪৪৬	৯,৬৬৮	৮,০৯৬	৭৭,২৬	৬২,৭৪৬

বৈশিষ্ট্যগুলি যদি পরিমাপের যোগ্য হয় তাহ'লে প্রয়োজন অনুসারে বিভিন্ন ধরণের শ্রেণী-বিভাগ করা সম্ভব।

অষ্টম অধ্যায়

সারিবন্দী (Array) ঃ

টেবল্ তৈরী করার জন্য তথ্য যখন সংখ্যাবিজ্ঞানীর হাতে সঞ্চিত হয়, তখন সেগুলি থাকে এলোমেলো, আকার-অবয়বহীন। সংখ্যাবিজ্ঞানীর কাজ সেগুলিকে সাজিয়ে আলোচনার যোগ্য করে তোলা। বৈজ্ঞানিক পদ্ধতির তিনটী ধাপ—পর্য্যবেক্ষণ, সিদ্ধান্ত ও প্রমাণ। সংখ্যা-বিজ্ঞানে

টেবল্—নং ৬

কারখানার মজুরের আয়।

২৬।০	২৮৸০	২৪৵০	২৯৸০	৩০॥৵০	২৪৸০	২৩।৶০	২৯।০
২৬৸০	২৪।৵০	২৫৸০	২৭।০	২৫।০	২৭॥৵০	২৭৸০	২৮।০
২৮।০	২৭।০	২৭৸০	২৬।৵০	২৮।০	২৫৸০	২৬॥৵০	২৭।৵০
২৭৸০	২৮॥৴০	২৫।০	২৭৸০	২৭।০	২৭৲	২৮।৵০	২৬॥০
২৪।০	২৭৸০	২৭॥০	২৬।০	২৩॥০	২৭৸০	২৯॥৵০	২৭।৵০
২৭॥০	২৫।৵০	২৭॥০	২৯৲	২৭৲	২৭।০	২৪॥০	২৪৵০
২৬৵০	২৯।০	২৩॥৵০	২৭৵০	২৭।৵০	২৮।৵০	২৬৵০	২৮॥০
২৭৸৶০	২৫॥০	২৭॥০	২৪৵০	৩০৲	২৮৲	২৮॥০	২৪।০
২৭।০	২৭৸৶০	২৫।০	২৬॥৵০	২৪।০	২৮॥০	২৬॥০	২৭।৵০
২৬৸০	৩১৲	২৪৲	২৫।৵০	২৮৸৵০	২৫॥০	২৭৸৶	২৬॥০
৩০।০	২৮॥০	২৬৸০	২৪॥৵০	২৬॥০	২৮৸৵০	২৭৸৶০	২৫৸০
২৯॥০	৩০৲	২৪।৵০	২৫৸০	২৭৲	২৫।০	২৮।০	২৬।০
২৫৸০	২৬।০	২৬।০	২৬৸০	২৮।০	২৬।০	২৫৸০	২৭৸৵০
২৬॥০	২৭৲	৩০৸০	২৮॥৵০	২৩॥০	২৫৵০	২৪৸০	২৮৵০
২৬।০	২৭।০	২৮৵০	২৯৵০	২৯৸৶০	২৭।০	২৮॥০	৩০৵০
২৬॥০	২৭॥০	২৩৲	২৪॥০	২৬॥০	২৮৵০	২৭॥০	২২৸৵০
৩০৸০	২৮॥৴০	২৭৸৶০	২৬৸০	২৫।০	২৭৸৶০	২৬।০	২৪৵০
২৬৸৶০	২৫।০	২৫৸০	২৮৸৵০	২৭৵০	২৬৲	২৫৲	২৭॥০
২৬॥০	২৭৸০	২৮।৵০	৩০॥০	২৪৵০	২৭।০	২৫৵০	২৯॥০
২৮৵০	২৬।০	২৭৵০	২৪॥৵০	২৬।০	২৯৸০	২৭৸৶	২৭৸৶০
২৪৵০	২৫৵০	২৭॥০	২৪।০	২৬৸০	২৯।৳	৩০৵০	২৫৸০
২৮৵০	২৮।৵০	২৪॥০	২৫৸৵০	২৭৲	২৭॥০	২৬৸০	২৬৵০
২৯৲	২৩৲	২৮॥৵০	২৯।০	২৮৸০	২৬॥৵০	২৭॥০	২৮॥০
২৬৵০	২৭৵০	২৫৸০	২৬৸০	২৬।০	২৫৸০	২৩॥০	২৭৵০
২৪॥০	২৫৸০	২৬৸০	২৭।০	২৮।০	২৬।০	২৫॥৵০	২৭॥০

পর্য্যবেক্ষণ করে পাওয়া যায় ডেটা; ডেটাগুলিকে সাজিয়ে-গুছিয়ে একটা রূপ দিতে হয়, তবেই তা থেকে করা যায় সিদ্ধান্ত। একটী কারখানার ২০০জন মজুরের আয়ের হিসাব (টেবল নং ৬) দেওয়া হ'ল। ডেটাগুলি নির্দ্দিষ্ট একটা রূপ নেবার পূর্ব্বে যে অবস্থায় থাকে এটা হ'ল তারই একটা উদাহরণ। এখন যদি এই সংখ্যাগুলিকে পরিমাণ অনুযায়ী সাজিয়ে নেওয়া যায় তা হ'লে সংখ্যাগুলির একটা সঙ্গত রূপ পাওয়া যায়।

টেবল— নং ৭

কারখানার মজুরের আয়

২২৸৵০	২৪৷৷৵০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৵০	২৭৷৷০	২৮৷০	২৮৸৵০
২৩৲	২৪৸০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৵০	২৭৷৷০	২৮৷০	২৮৸৵০
২৩৲	২৪৸০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৵০	২৭৷৷৵০	২৮৷০	২৯৲
২৩৷৶০	২৫৲	২৫৸৵০	২৬৷৷০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷০	২৯৲
২৩৷৷০	২৫৵০	২৬৲	২৬৷০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷০	২৯৵
২৩৷৷০	২৫৵০	২৬৵০	২৬৷৷৵০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷০	২৯৷০
২৩৷৷৵০	২৫৵০	২৬৵০	২৬৷৷৵০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷০	২৯৷০
২৪৲	২৫৷০	২৬৵০	২৬৷৷৵০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷৵০	২৯৷০
২৪৵০	২৫৷০	২৬৵০	২৬৸০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷৵০	২৯৷০
২৪৵০	২৫৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷০	২৭৸০	২৮৷৵০	২৯৷৷০
২৪৵০	২৫৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷০	২৭৸৶০	২৮৷৵০	২৯৷৷০
২৪৵০	২৫৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	২৯৷৷৵০
২৪৵০	২৫৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷৵০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	২৯৸০
২৪৵০	২৫৷৵০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷৵০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	২৯৸০
২৪৷০	২৫৷৵০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷৵০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	২৯৸৶০
২৪৷০	২৫৷৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷৵০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	৩০৲
২৪৷০	২৫৷৷০	২৬৷০	২৬৸০	২৭৷৷০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	৩০৲
২৪৷০	২৫৷৷৵০	২৬৷০	২৬৸৶০	২৭৷৷০	২৭৸৶০	২৮৷৷০	৩০৵০
২৪৷৵০	২৫৸০	২৬৷০	২৭৲	২৭৷৷০	২৭৸৶০	২৮৷৷৴০	৩০৵০
২৪৷৵০	২৫৸০	২৬৷০	২৭৲	২৭৷৷০	২৮৲	২৮৷৷৴০	৩০৷০
২৪৷৷০	২৫৸০	২৬৷০	২৭৲	২৭৷৷০	২৮৵০	২৮৷৷৵	৩০৷৷০
২৪৷৷০	২৫৸০	২৬৷৵০	২৭৲	২৭৷৷০	২৮৵০	২৮৷৷৵০	৩০৷৷৵০
২৪৷৷০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৲	২৭৷৷০	২৮৵০	২৮৸০	৩০৸০
২৪৷৷০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৵০	২৭৷৷০	২৮৵০	২৮৸০	৩০৸০
২৪৷৷৵০	২৫৸০	২৬৷৷০	২৭৵০	২৭৷৷০	২৮৵০	২৮৸৵০	৩১৲

এ থেকে আয়ের পরিধি সম্বন্ধে একটা স্পষ্ট ধারণা জন্মে। ৬নং টেব্‌লে দেওয়া ডেটাগুলিকে সাজিয়ে লেখা হয়েছে ৭নং টেব্‌লে। এলোমেলো সংখ্যাগুলির চেয়ে এই টেবল্ বেশী প্রণিধানযোগ্য হলেও সংখ্যাগুলির উপর চোখ বুলিয়ে কোনরূপ সুস্পষ্ট ধারণা করা এখনও সহজ নয়; দেখে বড় জোর বলা চলে যে সবচেয়ে কম যার আয়, তার আয় হ'ল, ২২৸৵০: আর, সব চেয়ে বেশী যার আয় সে পায় ৩১৲ টাকা; আরও, হয় ত বলা যায় যে বেশীরভাগ লোকেরই আয় ২৫৲ টাকা থেকে ২৯৲ টাকার ভিতর। কিন্তু মজুরদের আয় সম্বন্ধে একটা সুস্পষ্ট ধারণা এতেও হ'ল না। যদি এখন আবার নতুনভাবে এই সংখ্যাগুলিকে শ্রেণীবদ্ধ করা যায়—যেমন, একটী নির্দ্দিষ্ট সীমার মধ্যে যাদের আয়, তাদের যদি এক শ্রেণীর মধ্যে ফেলা যায়—তাহ'লে মজুরী বণ্টনের ছবি আরও স্পষ্ট হয়ে উঠবে।

টেবল—নং ৮

সাপ্তাহিক আয়	কতজন ঐ আয় করে
২২৲ থেকে ২৩৸৶০	৭
২৪৲ " ২৫৸৶০	৪৭
২৬৲ " ২৭৸৶০	৯০
২৮৲ " ২৯৸৶০	৪৬
৩০৲ " ৩১৸৶০	১০
	২০০

যে ডেটা নিয়ে মজুরদের আয়ের আলোচনা সুরু করেছি এটা হ'ল তারই সংক্ষিপ্ত-সার। এই টেবল্ থেকে শুধু যে মজুরদের আয়ের বহরটাই বোঝা যায় তাই নয়, কি ধরণের আয় কত মজুর করে তারও হদিশ পাই এতে। টেব্‌লে দেখছি ৪৭জন আয় করেছে হপ্তায় ২৪৲ থেকে ২৫৸৶০ ভিতর। এটা বোঝার উপায় নেই যে এই ৪৭ জনের আয়ের স্বরূপটা ছিল কি; ৪৭ জনের প্রত্যেকেই ২৫৸৶০ আনা করে আয় করেছে, না আয়ের কোন তারতম্য ছিল। শ্রেণীবদ্ধ করলে এই ধরণের খুটিনাটী হারাতেই হবে। শ্রেণীবদ্ধ ডেটাগুলির থাকে দুটী সীমা —উচ্চ ও নীম্ন। দুইটী সীমার অবকাশকে বলা হয় 'শ্রেণী-অন্তর'। ৮নং টেব্‌লে ২২ থেকে ২৩৸৶০ পর্য্যন্ত শ্রেণীর নীম্ন-সীমা হল ২২ আর উচ্চ-সীমা হ'ল ২৩৸৶০ আনা, আর শ্রেণী-অন্তর হ'ল ২৲ টাকা। শ্রেণী-অন্তর

খাটো করে আন্‌লে অপেক্ষাকৃত বেশী খুঁটিনাটী (details) পাওয়া যায়। উপরের ডেটা অবলম্বন করে শ্রেণী-অন্তর বিভিন্ন ধরে নীচের টেবল্ দুটী (টেঃ নং ৯ ও ১০) করা হয়েছে। সুতরাং, একই ডেটা থেকে ভিন্ন রকম টেবল্ সঙ্কলন করা হল। এই তিনটী টেবল্ থেকে মজুরী-বণ্টন সম্বন্ধে যতটা পরিষ্কার ধারণা হয় এলোমেলো সাজান ডেটা থেকে (টেবল্ নং ৬) তা হয় না। এই ধরণে সুশৃঙ্খলভাবে তথ্য সঙ্কলন করে টেবল্ তৈরী করাকে বলে ফ্রিকোয়েন্সী ডিষ্ট্রীবিউসন টেবল্ (Frequency Distribution)। এই আলোচনা থেকেই বোঝা যাবে "ফ্রিকোয়েন্সী-টেবল্" তৈরী করতে গেলে কি পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে। ডেটা-গুলিকে প্রথমেই পরিমাপ হিসাবে সাজিয়ে নেওয়া দরকার; তারপর পর্য্যবেক্ষণ করে স্থির করতে হবে 'উচ্চ-সীমা' ও 'নীম্ন-সীমা'। শ্রেণী-অন্তর হিসাবে শ্রেণী-সংখ্যা একটা কাগজে লিখে নিয়ে যে-সব উদাহরণ বিশেষ-বিশেষ শ্রেণীতে পড়ে তাদের সেই সেই শ্রেণীর মধ্যে লেখা। এইভাবে "ফ্রিকোয়েন্সী" গণনা করে নিয়ে (অর্থাৎ এক-একটা শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা গণনা করে নিয়ে) মোট সংখ্যাগুলি নিয়ে উপরের মতন টেবল্ তৈরী করে ফেলা।

টেবল্—নং ৯

(শ্রেণী-অন্তর = ১৲ টাকা)

সাপ্তাহিক আয়				উদাহরণ (Frequency)
২২৲	থেকে	২২৸৶	....	১
২৩৲	”	২৩৸৶	....	৬
২৪৲	”	২৪৸৶	....	২১
২৫৲	”	২৫৸৶	...	২৬
২৬৲	”	২৬৸৶	...	৩৯
২৭৲	”	২৭৸৶	...	৫১
২৮৲	”	২৮৸৶	....	৩৩
২৯৲	”	২৯৸৶	...	১৩
৩০৲	”	৩০৸৶	...	৯
৩১৲	”	৩১৸৶	....	১
				২০০

টেবল্—নং ১০

(শ্রেণী-অন্তর = ॥০ আনা)

সাপ্তাহিক আয়			উদাহরণ (Frequency)
২২৲	থেকে	২২।৵	০
২২॥০	”	২২৸৵	১
২৩৲	”	২৩।৵	৩
২৩॥০	”	২৩৸৵	৩
২৪৲	”	২৪।৵	১৩
২৪॥০	”	২৪৸৵	৮
২৫৲	”	২৫।৵	১২
২৫॥০	”	২৫৸৵	১৪
২৬৲	”	২৬।৵	১৮
২৬॥০	”	২৬৸৵	২১
২৭৲	”	২৭।৵	২৩
২৭॥০	”	২৭৸৵	২৮
২৮৲	”	২৮।৵	১৭
২৮॥০	”	২৮৸৵	১৬
২৯৲	”	২৯।৵	৭
২৯॥০	”	২৯৸৵	৬
৩০৲	”	৩০।৵	৫
৩০॥০	”	৩০৸৵	৪
৩১৲	”	৩১।৵	১
৩১॥০	”	৩১৸৵	০
			২০০

শ্রেণী-অন্তর (Class Interval) :

শ্রেণী-অন্তর এমনভাবে ঠিক্ করতে হয় যেন শ্রেণীর অন্তর্গত উদাহরণগুলি শ্রেণীর মধ্যে প্রায় সমান ভাবে পরিব্যাপ্ত থাকে। ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ ব্যাখ্যা করতে গেলে এবং ঐ টেবলের উপর নির্ভর করে কোন হিসাব করতে গেলে শ্রেণীর মধ্য-বিন্দুই শ্রেণীর প্রতীক বলে ধরে নিয়ে হিসাব করা হয়। যেমন, ৯নং টেবলের উপর নির্ভর করে কোন হিসাব করতে গেলে আমরা ধরে নেব যে, ২৬৲ থেকে ২৬৸৵০-র অন্তর্ভুক্ত ৩৯টী উদাহরণের সবগুলিই এই শ্রেণীর মধ্য-বিন্দু ২৬৷৷০-র অন্তর্গত; অর্থাৎ, ৩৯ জনের মোট আয় দাঁড়াবে ২৬৷৷০ × ৩৯ = ১০৩৩৷৷০। সুতরাং, দেখা দরকার

যে শ্রেণীগুলির মধ্যে উদাহরণগুলি যেন সমানভাবে পরিব্যাপ্ত থাকে। শ্রেণীগুলিকে এমনভাবে সাজান প্রয়োজন যাতে মধ্য-বিন্দুগুলি ভগ্নাংশ না হয়ে পূর্ণ-সংখ্যা হয় এবং তা করলে ভবিষ্যৎ গাণিতিক হিসাবের অনেক সুবিধা হয়। এচ্-এ-স্টুর্জেস্ শ্রেণী-অন্তর (class interval) নির্দ্ধারণের একটা সূত্র দিয়েছেন; উদাহরণ সংখ্যা যদি N হয় ও শ্রেণী-অন্তর হয় i, তাহ'লে—

$$i=\frac{Range}{1+3{\cdot}322 \log N}$$

অর্থাৎ, শ্রেণী-অন্তর $=\dfrac{\text{ব্যাপ্তি}}{১+৩{\cdot}৩২২\ \text{লগ্}\ (\text{উ})}$; উ = উদাহরণ

এই সূত্রধরে হয়ত শ্রেণী-অন্তর পাওয়া যাবে ভগ্নাংশে, কিন্তু সেটাকে ধরে নিতে হবে পূর্ণ-সংখ্যা করে। উপরে যে উদাহরণ দিয়েছি তাতে 'ব্যাপ্তি' দাঁড়ায় ১০ এবং উদাহরণ-সংখ্যা হল ২০০; তা থেকে শ্রেণী-অন্তর পাই ১˙১৫; পূর্ণ-সংখ্যা ধরলে ১ টাকা ধরতে হয়। টেবল্ সাজাবার নিয়ম মোটামুটী এই—

(১) যে সব তথ্য টেব্লে সঙ্কলিত হয়েছে তাদের সুস্পষ্ট, সংক্ষিপ্ত অথচ পূর্ণাঙ্গ বিবরণ শিরোনামায় থাকা দরকার

(২) সারি ও স্তম্ভের মাথায় যে-সব কথাগুলি লেখা থাক্‌বে সেগুলি হওয়া চাই সংক্ষিপ্ত ও দ্ব্যর্থশূন্য

(৩) বিষম রাশিগুলি (ভ্যারিয়েব্‌ল্‌স্) ক্রমশঃ বাম হ'তে দক্ষিণে এবং উপর হ'তে নীচে সাজান-অনুসারে বেড়ে চল্‌বে

(৪) রেফারেন্সের সুবিধার জন্য প্রত্যেক সারি ও স্তম্ভের একটী করে ক্রমিক-সংখ্যা দেওয়া যেতে পারে

(৫) পরিমাপ নির্দ্দেশের জন্য কোন্ একক ব্যবহার করা হয়েছে তা সুস্পষ্টভাবে ব্যক্ত করা উচিত

(৬) প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সূত্র (Source) কি জানিয়ে দেওয়া দরকার

(৭) টেবল্‌টী নিজেই হবে একটা একক বিশেষ; টেবল্‌টী অনুধাবনের জন্য যা-কিছু ব্যাখ্যা প্রয়োজন তা এই টেব্‌লের অংশরূপে বা ফুট-নোটরূপে থাকা দরকার

নবম অধ্যায়

সঙ্কলিত টেবল্ (Derivative Table) :

তুলনামূলক আলোচনার সুবিধার জন্যই টেবল্ তৈরী করা হয়। টেবল্এ অনেক সময় এত বেশী আঁক থাকে যে এক পলক দেখে নিয়ে তথ্য সম্বন্ধে কোন ধারণা করাই অসম্ভব হ'য়ে পড়ে ; তাই বহু ক্ষেত্রে মূল টেবল্ থেকে নতুন একটা টেবল্ এমন ভাবে সঙ্কলন করা হয় যাতে যে-সব বিষয়ের উপর অনুসন্ধানকারীর' বা আলোচকের আগ্রহ বেশী, সেই-সবের উপরেই সহজে নজর পড়ে, আর, তার জন্য হয়ত গণিতের সাহায্য নিতে হয়। গণিতের সাহায্য নিয়ে নতুন যে টেবল্ তৈরী করা হয় তাকে সংখ্যা-বিজ্ঞানের পারিভাষিকে বলা হয় "সঙ্কলিত টেবল্"। সংখ্যা-গুলির তুলনামূলক আলোচনা করার একটা সহজ উপায় হল 'রেশিও' (অনুপাত) ব্যবহার। রেশিও প্রয়োগ করে যে টেবল্ সঙ্কলিত হয় তাকে ক্ষেত্র বিশেষে বলা হয় 'শতকরা', 'গড়', 'রেট্' (হার), 'সূচক-সংখ্যা' ইত্যাদি। এর যে-কোনটাই অবলম্বন করা হোকনা-কেন উদ্দেশ্য হ'ল তুলনীয় সংখ্যাগুলিকে এরকম ভাবে ছোট করে আনা যাতে ঠিকমত তুলনা করা চলে। যেমন, নীচে যে টেবল্ (টেবল্ নং ১১) দিলুম তাতে ১৯১১, ১৯২১ ও ১৯৩১ সনের পুরুষ ও নারী সম্বন্ধে তথ্য গ্রথিত হয়েছে। বিশ বছরে লোকসংখ্যা কত বেড়েছে তারই পরিচয় পাই এই টেবল্ থেকে। সংখ্যায় নারী কি পুরুষ বেশী তাও বোঝা যায় এ থেকে। কিন্তু হ্রাস-বৃদ্ধির বহরটা কি রকম, অর্থাৎ এক-এর তুলনায় আর কি হারে বেড়েছে তা বোঝার উপায় নেই এ থেকে। সে বুঝতে গেলে এই মূল টেবল থেকে নতুন একটা টেবল্ সঙ্কলন করতে হবে।

টেবল্ নং ১১

বয়স অনুসারে পুরুষ ও নারীর সংখ্যা—ভারতবর্ষে (হাজারে)

বয়স	১৯১১		১৯২১		১৯৩১	
	পুরুষ	নারী	পুরুষ	নারী	পুরুষ	নারী
১এর কম	৫,১২১	৫,১২৮	৪,৬৩৯	৪,৫৯৮	৫,৩৪৯	৫,৪১৯
১থেকে ৪	১৬,১১৫	১৬,৭৪৪	১৪,৮৪৬	১৫৫৭৩	২১,০৮৬	২১,৬১১
৫ " ৯	২২,১৩২	২১,১১১	২৩, ৮৪৬	২২,৯০১	২৩,৭৯৬	২১,৭১১
১০ " ১৪	১৮,৬৪০	১৫,২২৩	২০,১৭১	১৬,৫৭১	২১,৫৭৩	১৯,০৬১
১৫ " ১৯	১৩,৫৬৮	১২,৬১৪	১৩,৬৪৯	১২,৪৯৬	১৬,০৪০	১৫,৮৯৮
২০ " ২৪	১৩,১৫৫	১৪,১৮৭	১২,৫৬৪	১৩,৫০২	১৬,৩১৫	১৬,৬৯৫
২৫ " ২৯	১৪,৩৩৬	১৩,৮৮৩	১৪,০২৭	১৩,৫৭৩	১৫,৪৬৬	১৪,৭২৫
৩০ " ৩৪	১৩,২৫৮	১২,৭৪১	১৩,৩৭৬	১২,৭৬২	১৪,২১৭	১২,৪১০
৩৫ " ৩৯	৯,৯৪৭	৮,৪৮৪	১০,৩০৬	৮,৬৬৩	১১,৫৪৮	১০,০১৫
৪০ " ৪৪	১০,১৪৮	৯,৬২৭	১০,০৭০	৯ ৫১২	৯,৮৫২	৮,৫৬০
৪৫ " ৪৯	৬,০৮২	৫,১৬২	৬,৩৪৭	৫, ২৯৭	৭,৬৯২	৬,৫৮৯
৫০ " ৫৪	৬,৯১৭	৬,৭৫৯	৭,০৩৪	৬,৭০৭	৬,০২৫	৫,৩৫৬
৫৫ " ৫০	২,৮২৫	২,৪৯৭	২,৯৯৭	২,৫৭৮	৪,১৫৬	৩৯২৮
৬০এর বেশী	৭,৭৬৪	৮,৪৭৭	৮,২০৯	৮,৫৩৬	৭,১৫০	৭,১০৬
মোট	১,৬০,০০১	১,৫২,৬৪৩	১,৬২,০৮১	১,৫৩,২৬৯	১,৮০,২০৫	১,৬৯,৫৫৪

টেবল্—নং ১২

বয়স অনুসারে পুরুষ ও নারীর শতকরা হিসাব—ভারতবর্ষে

বয়স	১৯১১		১৯২১		১৯৩১	
	পুং	নাঃ	পুঃ	নাঃ	পু	নাঃ
০ থেকে ৪	১৩.৩	১৪.৩	১২.০	১৩.২	১৪.৭	১৫.৯
৫ " ৯	১৩.৮	১৩.৮	১৪.৭	১৪.৯	১৩.২	১২.৮
১০ " ১৪	১১.৭	১০.০	১২.৪	১০.৮	১২.০	১১.২
১৫ " ১৯	৮.৫	৮.৩	৮.৪	৮.২	৮.৯	৯.৪
২০ " ২৪	৮.৫	৯.৩	৭.৮	৮.৮	৯.১	৯.৮
২৫ " ২৯	৯.০	৯.১	৮.৭	৮.৯	৮.৬	৮.৭
৩০ " ৩৪	৮.৩	৮.৩	৮.৩	৮.৩	৭.৯	৭.৬
৩৫ " ৩৯	৬ ২	৫.৬	৬.৪	৫.৭	৬.৪	৫.৯
৪০ " ৪৪	৬ ৩	৬.৩	৬.২	৬.২	৫.৫	৫.০
৪৪ " ৪৯	৩.৮	৩.৪	৩.৯	৩.৫	৪.২	৩.৯
৫০ " ৫৪	৪.৩	৪.৪	৪.৩	৪.৪	৩.৩	৩.২
৫৫ " ৫৯	১.৮	১.৬	১.৮	১.৭	২.৩	২.৩
৬০ এর বেশী	৪.৯	৫.৬	৫.১	৫.৬	৫.০	৪.২
মোট	১০০	১০০	১০০	১০০	১০০	১০০

টেবল্ নং ১২ এই ধরণের সঙ্কলিত টেবল্। এই টেবল্ দেখলে সহজেই চোখে পড়ে যে জন-সমষ্টিতে ১৫ বছরের কম বালক-বালিকাই বেশী; আরও নজরে পড়ে যে ৫ বছরের কম ছেলে-মেয়ের কথা ধরলে ছেলেদের চেয়ে মেয়েদের সংখ্যাই দেখা যাচ্ছে বেশী। বয়স অনুসারে ছেলে-মেয়েদের তুলনা এই টেবল্ ধরে বেশ সহজেই করা যায়। টেব্‌লে যখন সংখ্যার পরিমাণটা অনেক, তখন তাকে (সেই সংখ্যাগুলিকে) কোন উপায়ে রেশিওতে (অনুপাত) পরিণত করে নিতে হয়। সংখ্যাগুলি থেকে যখন গড় নির্দ্ধারণ করি তখনও আমাদের মনে থাকে এই কথাই, কেননা, গড়ও হ'ল এক ধরণের রেশিও। বিভিন্ন এককে প্রকাশিত সংখ্যার রেশিও নিয়েই গড়। সমষ্টির প্রত্যেকটীর মধ্যে সমান মাত্রায় ভাগ হ'লে প্রত্যেক এককের অংশে যা পড়ে তাই হ'ল গড়। নীচের টেব্‌লে দেখান হয়েছে মাসে মাসে কতগুলি করে চেক্, ক্লিয়ারিং হাউস থেকে খালাস হয়েছে।

টেবল্ নং ১৩

চেক্ খালাসের সংখ্যা—ভারতবর্ষে, ১৯৪৬-৪৭

মাস	চেক্‌সংখ্যা
এপ্রিল	১৮,৮৪,২৫৮
মে	২০,১২,২৭৩
জুন	১৭,৫২,০৯৫
জুলাই	১৭,৮২,৪৮৪
অগাষ্ট	১৩,৮২,১৮৬
সেপ্টেম্বর	১৫,৬৩,৮০০
অক্টোবর	১৬,১৮,২৩৬
নভেম্বর	১৮,২২,২৩২
ডিসেম্বর	১৭,৮৬৯৯২
জানুয়ারী	২০,৬৭,২৪৯
ফেব্রুয়ারী	১৮,০৭'৯৬৭
মার্চ্চ	১৮,৭৬,৯৮৭
মোট—	২১৩,৫৬,৫৫৯

$$\text{গড়} = \frac{২১৩,৫৬,৫৫৯}{১২}$$

$$= ১৭,৭৯,৭১৩\text{'}২৫$$

এই হিসাব থেকে আমরা বলতে পারি যে গড়ে মাসে ১৭,৭৯,৭১৩টী চেক্ ক্লিয়ারিং-এর সাহায্যে খালাস হয়েছে; অর্থাৎ প্রতি মাসে যদি সমান-সংখ্যক চেক্ খালাস হ'ত তাহ'লে যতগুলি চেক্ খালাস হলে ১২ মাসে মোট ২১৩,৫৬.৫৫৯টা চেক খালাস হত, সেই সংখ্যাই হ'ল গড়। বলা যায় যে, "গড়" পাওয়া যায় এই ধরণের রেশিও থেকে—

লব÷হর=গড়; যেখানে, সমগ্র সমষ্টির মধ্যে যে-পরিমাণ কোন বিশেষ বৈশিষ্ট্য থাকে "লব" হ'ল তারই প্রতীক; আর, "হর" নির্দ্দেশ করে কোন সমষ্টির অন্তর্গত মোট সংখ্যা।

রেট্-ও হ'ল এক ধরণের রেশিও। সাধারণতঃ রেট্ ব্যক্ত করা হয় 'প্রতি শতকে' বা 'প্রতি সহস্রে' বা 'প্রতি দশ হাজারে' ইত্যাদি হিসাবে। এর কোন্‌টা ব্যবহার করা হবে তা নির্ভর করে কিসে সুবিধা হবে তার উপর। যেমন, জন্মহার বা মৃত্যুহার সাধারণতঃ ব্যক্ত করা হয় প্রতি সহস্রে। কোন বৎসরে যত শিশু জন্মেছে (বা মরেছে) তাকে "হর" ধরে, আর সেই বৎসরের মোট লোকসংখ্যাকে "লব" ধরে স্থির করা হয় প্রতি সহস্রে জন্ম বা মৃত্যুহার।

$$\text{জন্মহার} = \frac{১০০০ \times \text{জন্মসংখ্যা}}{\text{মোট লোকসংখ্যা}}$$

ভারতবর্ষে ১৯৩২শে শিশু জন্মেছে মোট ৯১,৩৫,৮৯০, আর, ঐ বছর মোট লোকসংখ্যা ছিল ৩৪,৯৭,৫৯,০০০; তাহ'লে ভারতে হাজার করা শিশু জন্মেছে—

$$\frac{১০০০ \times ৯১,৩৫,৮৯০}{৩৪,৯৭,৫৯,০০০} = ২৬\cdot১২$$

রেট যদি দশমিকে হয় তাহ'লে সেটাকে পূর্ণ-সংখ্যায় ব্যক্ত করাই ভাল। যেমন প্রতি সহস্রে জন্মহার ৩৪·৩ বলার চেয়ে প্রতি দশসহস্রে জন্মহার ৩৪৩ বল্‌লে অনেক সময় বোঝার সুবিধা হয়।

দশম অধ্যায়

বিভিন্ন ধরণের গড়ঃ

একটা সংখ্যার সঙ্গে আর একটা সংখ্যার তুলনার সুবিধার জন্য রেশিও প্রয়োগ করা হয়; তেমনি, আবার, রেশিওকে রেশিওর সঙ্গে তুলনা করা হয়। যেমন, একটা সহরের জন্মহারকে আর একটা সহরের জন্মহারের সঙ্গে তুলনা করা চলে; অথবা, এক বৎসরের জন্মহারের সঙ্গে আর এক বৎসরের জন্মহারের তুলনা করা চলে। শুধু সঙ্কলিত টেব্‌লই নয়, মূল টেবল্‌ও আলোচনার কাজে লাগে। ভুললে চলবে না যে $(\text{রেশিও})_1$-এর সঙ্গে $(\text{রেশিও})_2$-এর তুলনার মানেই হ'ল $\frac{\text{লব}_1}{\text{হর}_1}$-এর সঙ্গে $\frac{\text{লব}_2}{\text{হর}_2}$-এর তুলনা। বহু কারণে রেশিওর পরিবর্ত্তন হ'তে পারে; তার মধ্যে একটা কারণ হ'ল যে হয়ত সমষ্টির কাঠামোরই কিছু পরিবর্ত্তন হ'য়ে থাকবে। একটা উদাহরণ নিলে কথাটা বোঝা সহজ হবে। কয়লাখনির কথা ধরা যাক। মজুর-প্রতি উৎপাদন-হার লক্ষ্য করে বলা যায় খনিটীর উৎপাদিকা-শক্তি কি রকম। হয়ত লক্ষ্য করা যাচ্ছে যে বছরের পর বছর জন-প্রতি কয়লা উৎপাদন বেড়েই চলেছে। উৎপাদন বাড়ার কারণ এ হ'তে পারে যে উন্নততর যন্ত্রপাতি ব্যবহার করার জন্য কয়লা কাটা হচ্ছে বেশী; অথবা, এও হতে পারে যে চালু খনির সংখ্যার অদল-বদল হয়েছে। হয়ত, খনিগুলির মধ্যে নিকৃষ্ট শ্রেণীর যে-গুলি তাদের অনেকগুলিই কাজ বন্ধ করেছে, যে সব খনিতে কাজ হয় তাদের উৎপাদন-হার কিছুমাত্র বাড়ে-কমেনি। এখন যদি গড় উৎপাদন-হার নিরূপণ করতে হয়, তাহ'লে অপেক্ষাকৃত উৎকৃষ্ট এবং চালু খনিগুলির মজুরদের সংখ্যাই শুধু গণণার মধ্যে আনা হবে এবং সেইজন্য এই দ্বিতীয় রেশিওটী প্রথম রেশিও-র তুলনায় হবে বেশী। সুতরাং, রেশিও পরিবর্ত্তন, সমষ্টির কাঠামোরই পরিবর্ত্তন নির্দ্দেশ করতে পারে।

রেশিওর পরিবর্ত্তন দেখলে কি বুঝতে হবে? বুঝতে হবে যে, কোন এককের

বা বৈশিষ্ট্য তার মাত্রার পরিবর্ত্তন হয়েছে, অথবা একক-সমষ্টির কাঠামোরই আংশিক বা কিছু মাত্রায় পরিবর্ত্তন হয়েছে। সাধারণতঃ, আমরা প্রথমটীকেই পরিবর্ত্তনের হেতু বলে ধরি। তবে ভাল করে পরীক্ষা করে দেখতে হ'লে, সমগ্র সমষ্টিকে ক্ষুদ্রতর অংশে ভাগ করে নেওয়া ভাল; এবং এই ক্ষুদ্রতর অংশগুলির পৃথক পৃথক রেশিও স্থির করে নিয়ে, অংশর সঙ্গে অংশর তুলনা করে দেখা প্রয়োজন। পরিবেশ ও জাতিগত বৈশিষ্ট্যের প্রভাব শিশুমৃত্যুর উপর কি রকম জানার উদ্দেশ্য নিয়ে যদি দুইটী বিভিন্ন সম্প্রদায়ের মৃত্যুহার তুলনা করে দেখতে চাই, তাহ'লে দুইটী সম্প্রদায়ের একই বয়স-সমষ্টির (age-group) লোকেদের তুলনা করে দেখতে হবে, তা নইলে ঠিক হবে না; কেননা, দুইটী সম্প্রদায়ের মধ্যে বিভিন্ন বয়সের অনুপাত বিভিন্ন থাকতে পারে। সুতরাং মূল সমষ্টিকে ভেঙ্গে সমজাতীয় বা সদৃশ-একক-বিশিষ্ট ছোট ছোট সমষ্টিতে পরিণত করতে হয়। যেমন, যদি আমাদের জানার বিষয় হয় যে, সমাজের মধ্যে তামাক-প্রীতি বেড়েছে না কমেছে, তাহ'লে আমাদের এই প্রশ্নটীকে দুদিক থেকে দেখতে হবে; প্রথমতঃ, দেখতে হবে যে সমগ্র জন-সমষ্টির মধ্যে তামাকসেবীর অনুপাত বেড়েছে কিনা—এটা পর পর কয়েক বৎসর ধরে লক্ষ্য করে দেখতে হবে; দ্বিতীয়তঃ, সমগ্র জন-সমষ্টির তুলনায় তামাক সেবনের মাত্রা বেড়েছে কিনা না দেখে, জানতে হবে একমাত্র তামাকসেবীরাই তামাক সেবনের পরিমাণ কি ভাবে বাড়িয়ে দিয়েছে (তবে দুঃখের বিষয় তামাকসেবীর কোন হিসাব এ পর্য্যন্ত পাওয়া যায় না)। অর্থাৎ, তুলনামূলক আলোচনার জন্য রেশিও নিরূপণ করতে গিয়ে 'লব' ও 'হর'কে এমনভাবে সম্বন্ধবদ্ধ করতে হবে যাতে আলোচ্যবিষয় সম্বন্ধে নির্ভুল সংবাদ পাওয়া যায়।

সাধারণতঃ চার রকমের গড় ব্যবহার করা হয়—

(১) রীতি (মোড্)
(২) মধ্যমা (মীডিয়ান্)
(৩) সরল গড় (এরিথ্মেটীক্ অ্যাভারেজ)
(৪) বর্গীয় গড় (জিওমেট্রিক অ্যাভারেজ)

এ ছাড়াও কয়েক ধরণের গড় আছে, তবে সেগুলি সাধারণতঃ ব্যবহার করা হয় না।

মোড্ :

মোড্ বল্‌লে বোঝায় সর্ব্বাধিক উদাহরণ-বিশিষ্ট শ্রেণী। গ্রাফ এঁকে যখন প্রকাশ করা হয় তখন মোড্ নির্দ্দেশ করে কার্ভের শীর্ষদেশ। তবে কার্ভের কুঁজ (শীর্ষ) যদি দুই বা ততোধিক হয় তাহ'লে মোড্-ও হবে দুই বা ততোধিক। সাধারণ কথায় যখন আমরা বলি 'গড় আয়' কি 'গড় মজুরী' কি 'গড় উচ্চতা' তখন আমরা 'মোডাল আয়' বা 'মোডাল মজুরী' বা 'মোডাল উচ্চতা'র কথাই বলি। কথায় বলি মোডাল কেরাণীর মাসিক আয় ৩০৲ টাকা; এ কথার অর্থ এই যে এটাই হ'ল কেরাণীর চলতি আয়, কেরাণী সাধারণতঃ এই আয় করে। কেরাণী পরিবারের মধ্যে শতকরা ১৫, ২৫, ৫০ এবং ১০জন যথাক্রমে যদি ২, ৪, ৩, ও ৫ কামরাযুক্ত বাড়ীতে বাস করে, তাহ'লে বলা যায় যে সাধারণতঃ কেরাণী বাস করে ৩ কামরাওলা বাড়ীতে। মোড্ নির্দ্ধারণ করা সব সময়ে এত সহজ হয় না। সাধারণতঃ সংখ্যা-বিজ্ঞানে সম্পূর্ণ নির্ভুল মোড্ নির্দ্ধারণ করা হয় না, মোটামুটী মোড্ পেলেই কাজ চলে যায়।

মোড্ নির্দ্ধারণের জন্য টেবল্ নং ৮টী নেওয়া যাক। এই টেব্‌লে দেখছি যে, ২৬ হ'তে ২৮ যে শ্রেণী তারই উদাহরণ-সংখ্যা সবচেয়ে বেশী; সুতরাং এই শ্রেণীর মধ্যেই মোড্ পাওয়া যাবে। এই শ্রেণীর মধ্যবিন্দু হ'ল ২৭ এবং সেটাকেই মোটামুটী ভাবে মোড্ বলে ধরা যায়। শ্রেণী-বিভাগ ভিন্ন হ'লে মোড্ও ভিন্ন ভিন্ন হ'তে পারে। একই টেব্‌লের উপর নির্ভর করে তৈরী করা হয়েছে টেবল নং ৮, টেবল্ নং ৯ ও টেবল্ নং ১০। টেবল্ ৯ ও টেবল্ ১০-এর শ্রেণী-অন্তর টেবল্ ৮ থেকে আলাদা। শ্রেণী-অন্তর একটাকা হলে মোড্ দাঁড়ায় ২৭॥০; আর, শ্রেণী-অন্তর ৮ আনা হলে মোড্ দাঁড়ায় ২৭৸০; শ্রেণী-অন্তর বিভিন্ন ধরে যত শ্রেণী-বিভাগ করা যাবে, মোড্-ও ততই বদ্‌লাতে থাকবে। একই ডেটা থেকে শ্রেণী-বিভাগ অনুসারে বিভিন্ন মোড্ পাওয়া সম্ভব। উদাহরণের সংখ্যা পরিমিত বলেই এই মুস্কিল দেখা দেয়; উদাহরণের সংখ্যা যথেষ্ট রকম বাড়ালে যথার্থ মোড্ পাওয়া যেতে পারে।

মোড্ নির্ণয়ের আর এক উপায় হ'ল "সমষ্টি-বন্ধন" (grouping process)।

নীচে একটা উদাহরণ দেওয়া হ'ল। প্রথমতঃ, উদাহরণ-গুলিকে জোড়া-জোড়া করে সমষ্টিবদ্ধ করা হয়েছে; তারপর, এক নম্বরের উদাহরণটী বাদ দিয়ে আবার জোড়া-জোড়া সমষ্টিবদ্ধ করা হয়েছে। তারপর, তিনদফা করে উদাহরণ সমষ্টিবদ্ধ করা হয়েছে; পরের ধাপে এক নম্বরের উদাহরণটী বাদ দিয়ে ঐ একই ধারায় সমষ্টিবদ্ধ করা হয়েছে। তারপর, প্রথম দু'নম্বর উদাহরণ বাদ দিয়ে তিনদফা করে উদাহরণ সমষ্টিবদ্ধ করা হয়েছে। প্রয়োজন হলে চারদফা উদাহরণ সমষ্টিবদ্ধ করতে হবে। প্রত্যেক ধাপের বৃহত্তম সমষ্টির মধ্যে রয়ে গেছে মোড্‌টী।

টেবল্‌ নং ১৪

শ্রেণী	উদাহরণ					
৭	৯	২১		৩৬		
৮	১২		২৭		৪৩	
৯	১৫	৩১				৫০
১০	১৬		৩৫	৫৬		
১১	১৯	৪০			৬১	
১২	২১		৪২			৬৪
১৩	২১	৪৩		৬১		
১৪	২২		৪০		৬০	
১৫	১৮	৩৮				৫৪
১৬	২০		৩৬	৫০		
১৭	১৬	৩০			৪১	
১৮	১৪		২৫			৩৫
১৯	১১	২১				
২০	১০					

প্রথম গ্রুপিং (সমষ্টি-বন্ধন) থেকে দেখছি যে মোড্ দাঁড়াচ্ছে হয় ১৩ নয় ১৪ ; কেননা, এই দুটীর সমষ্টিই হচ্ছে সর্ব্বাধিক : ৪৩। দ্বিতীয় গ্রুপিং-এ দাঁড়াচ্ছে ১২ ও ১৩ ; তৃতীয়য় ১৩, ১৪ ও ১৫ ; চতুর্থয় ১১, ১২ ও ১৩ এবং পঞ্চমে ১২, ১৩ ও ১৪ ! অর্থাৎ—

১৩ সর্ব্বাধিক	হয়েছে	৫বার	
১৪ „	„	৪	„
১২ „	„	৩	„
১৫ „	„	১	„

সুতরাং বোঝা যাচ্ছে যে ১৩ শ্রেণীই হচ্ছে নির্ণেয় মোড্।

গণিতের সাহায্যেও মোড্ নির্ণয় করা যায়।

যদি—

l = যে শ্রেণীতে মোড্ আছে তার নীম্নসীমা

f_1 = যে শ্রেণীতে মোড্ আছে তার নীচের শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা

f_2 = যে শ্রেণীতে মোড্ আছে তার উপরের শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা

i = শ্রেণী-অন্তর হয়,

তাহ'লে—

$$\text{মোড্} = l + \frac{f_2}{f_2 + f_1} \times i$$

টেবল নং ৮এ যদি এই সূত্র প্রয়োগ করা যায় তাহলে দাঁড়ায়—

$$\text{মোড্} = ২৬ + \frac{৪৬}{৪৬ + ৪৭} \times ২ = ২৬\text{'}৯ = ২৭ \text{ মোটামুটী।}$$

মোড্ ব্যবহারের সুবিধা এই—

(ক) সহজেই বোঝা যায়

(খ) বিষম উদাহরণ (extreme) কোনরূপ ব্যাঘাত সৃষ্টি করতে পারে না। সাধারণের কাছে যখন ।•/।৵• দান পাওয়া যাচ্ছে, তখন যদি কেউ মোটা টাকা দান করে বসে তাহ'লে মোড্ তা'তে ব্যহত হয় না, কিন্তু গড় হয়

(গ) প্রান্তিক উদাহরণগুলির বিষয়ে বিশেষ কিছু জানা প্রয়োজন হয় না, সেগুলি বাদ দিলে ক্ষতি হয় না। ভারতের সাধারণ লোকের সম্পদ কিরকম জানার জন্য ক্রোড়পতিদের ধরার কোন প্রয়োজন হয় না

তবে মোডের অসুবিধা এই—

(ক) সাধারণতঃ সুস্পষ্ট সংজ্ঞা কিছু পাওয়া যায় না

(খ) যথাযথ ভাবে মোড্ নির্দ্দেশ করাও যায় না

(গ) গাণিতিক প্রক্রিয়ার সাহায্য নেওয়াও সহজ হয় না

(ঘ) সরল গড়ে যেমন গড় থেকে মোট নির্দ্ধারণ করা যায়, মোড্ থেকে তা করা যায় না। গড়ে আয় ২ টাকা ক'রে হলে ৫০০০ লোকের মোট আয় হচ্ছে ১০০০০ টাকা; কিন্তু যদি বলা হয় যে মোড্ হ'ল ২ টাকা তাহ'লে তা থেকে মোট আয় নির্ণয় করা যায় না

মধ্যমা (Median) :

মধ্যমাও তুলনামূলক আলোচনার জন্য ব্যবহার করা হয়। একটা সমষ্টিকে মাপ অনুযায়ী স্তরে স্তরে সাজালে মাঝারী মাপটাই হবে "মধ্যমা"। যেমন ধর, সাতজন লোকের উচ্চতা যথাক্রমে ৫ফিঃ ৪ই, ৫ফিঃ ৬ই, ৫ফিঃ ৭ইঃ, ৫ফিঃ ৮ইঃ, ৫ফিঃ ৮ইঃ, ৫ফিঃ ৯ইঃ, ও ৫ফিঃ ১০ইঃ। উচ্চতা অনুযায়ী পর পর সাজালে মাঝের লোকটীর উচ্চতা দাঁড়ায় ৫ফিঃ ৮ইঃ; তাহ'লেই এই সারিগুলির মধ্যমা দাঁড়াল ৫ফিঃ ৮ইঃ। কিন্তু লোকগুলির গড় উচ্চতা হ'ল (৩৯ফিঃ ৪ইঃ÷৭)=৫ফিঃ ৭$\frac{৩}{৭}$ ইঃ। সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, "গড়" এবং "মধ্যমা" দুই এক না হ'তে পারে, তবে উভয়ই প্রায় কাছাকাছিই হয়। সারির সংখ্যা বিজোড় না হয়ে যদি জোড় হয়, তাহ'লে মাঝের সারি দুটীর গড় নিয়ে মধ্যমা স্থির করতে হয়। যেমন ধর, মজুরীর হার যথাক্রমে—১॥০, ২৲, ২।০, ২॥০, ৩৲, ৩॥০, ৪৲ ও ৫৲; এখানে মাঝের ২সারি হচ্ছে ২॥০ ও ৩৲; এই দুটীর গড় হ'লে ২৸০ এবং এই ২৸০ আনাই হ'ল মধ্যমা। 'ফ্রিকোয়েন্সী-টেবল্'এর তথ্য থেকে মধ্যমা নির্দ্ধারণ করতে হলে প্রায় এই একই উপায় অবলম্বন করতে হয়। নীচে একটা টেবল্ দিলুম—

টেবল্ নং ১৫

মজুরদের সাপ্তাহিক আয়

সাপ্তাহিক আয় (টাকায়)	মজুর সংখ্যা
৪৲ থেকে ৭·৯৯৲	৮
৮৲ „ ১১·৯৯৲	২৮
১২৲ „ ১৫·৯৯৲	২৫
১৬৲ „ ১৯·৯৯৲	২০
২০৲ „ ২৩·৯৯৲	৯
২৪৲ „ ২৭·৯৯৲	১০
২৮৲ „ ৩১·৯৯৲	১২
৩২৲ „ ৩৫·৯৯৲	৭
৩৬৲ „ ৩৯·৯৯৲	৭
	১২৬

$$\frac{N}{2} = \frac{১২৬}{২} = ৬৩$$

এখানে যে উদাহরণ নিয়েছি, তার মধ্যমা হবে শ্রেণীর সেই মান যার উভয় পার্শ্বে থাকবে ৬৩জন মজুর। ধর, মধ্যমা নির্দ্ধারণের জন্য আমরা শ্রেণীর নীম্নতম মান থেকে উচ্চতম মানের দিকে অগ্রসর হচ্ছি। প্রথম শ্রেণীর মান ৭·৯৯ টাকা ছেড়ে যেই দ্বিতীয় শ্রেণীর মান ৮৲ ধরেছি, তখন দেখছি আমরা ৮জন মজুরকে গণণার মধ্যে এনে ফেলেছি। বাকী রয়ে গেছে (১২৬−৮)= ১১৮জন মজুর। দ্বিতীয় শ্রেণীর উচ্চতম সীমা অতিক্রম করে তৃতীয় শ্রেণীর কথা যখন ভাবছি, তখন ৩৬জন মজুরকে (৮+২৮) গণণার মধ্যে আনা হয়ে গেছে। এইভাবে তৃতীয় শ্রেণী অতিক্রম করলে গণণার মধ্যে আনা হবে ৬১ জন মজরকে; এবং, চতুর্থ শ্রেণী অতিক্রম করলে গণণার মধ্যে আনা হবে ৮১জন মজুরকে (৮+২৮+২৫+২০)। সুতরাং এই চতুর্থ শ্রেণীর সীমার মধ্যেই থাকবে ৬৩জন মজুর। প্রথম তিন শ্রেণীর মধ্যে আমরা পেয়েছি ৬১জন মজুর; অতএব চতুর্থ শ্রেণীর (অর্থাৎ যাদের আয় ১৬৲ থেকে ১৯·৯৯৲ ভিতর) ২০জন মজুরের মধ্যে মাত্র ২জনকে পেলেই ৬৩জন মজুর-সংখ্যা পূর্ণ হয়। প্রত্যেক শ্রেণীর মধ্যে মজুর-সংখ্যা সমানভাবে পরিব্যাপ্ত ধরে নেওয়া হয়েছে; তাই ২জন মজুর থাকবে শ্রেণী-অন্তরের $\frac{২}{২০}$ অংশের মধ্যে;

শ্রেণী-অন্তর এখানে হল ৪ ; সুতরাং ৪-এর $\frac{১}{১০}$ হ'ল '৪ । অতএব, দেখছি যে তৃতীয় শ্রেণী অতিক্রম করে চতুর্থ শ্রেণীর '৪ দূরত্ব অতিক্রম করলেই মজুর সংখ্যা পাওয়া যায় ৬৩। মধ্যমা তাহ'লে দাঁড়াল—(১৬+'৪) = ১৬'৪। মধ্যমা নির্দ্ধারণের এই পদ্ধতিকে এইভাবে বলা যায়—

(১) প্রথমে ডেটাগুলিকে ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ অনুযায়ী সাজাও—

(২) উদাহরণগুলির মোট সংখ্যাকে ২ দিয়ে ভাগ কর ; মধ্যমার উভয় পার্শ্বে ঐ সংখ্যক উদাহরণ থাকবে—

(৩) নিম্নতম শ্রেণী থেকে সুরু করে পরপর শ্রেণীগুলির উদাহরণ-সংখ্যা যোগ করে যাও যতক্ষণ পর্য্যন্ত না যে শ্রেণীতে মধ্যমা থাকবে তার নীম্নতম মাত্রা পাওয়া যায়—

(৪) এবার হিসাব করে দেখতে হবে যে এপর্য্যন্ত যতগুলি উদাহরণের হিসাব নেওয়া হয়েছে তার সঙ্গে কতগুলি উদাহরণ যোগ দিলে যোগফল হয় $\frac{N}{2}$ বা মোট উদাহরণ সংখ্যার অৰ্দ্ধেকের সমান—

(৫) এইভাবে যে উদাহরণ-সংখ্যা পেলুম তাকে ভাগ দিতে হবে যে শ্রেণীতে মধ্যমা থাকবে সেই শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে—

(৬) যে ভগ্নাংশ এইভাবে পাওয়া গেল তাকে গুণ কর শ্রেণী-অন্তর দিয়ে—

(৭) যে শ্রেণীতে মধ্যমা থাকবে তার নীম্নতম মাত্রার সঙ্গে যোগ কর ৬নং পদ্ধতিতে পাওয়া সংখ্যাটী ; এই যোগফলই হবে মধ্যমা।

নীম্নলিখিত সূত্র ধরে গণিতের সাহায্যেও মধ্যমা নির্দ্ধারণ করা যায়—

যদি l = যে শ্রেণীতে মধ্যমা আছে সেই শ্রেণীর নীম্নতম মাত্রা বা সীমা

r_1 = মধ্যমা-সম্বলিত শ্রেণীর উচ্চতম মাত্রার নীচ পর্য্যন্ত মোট উদাহরণ-সংখ্যা

r_2 = মধ্যমা-সম্বলিত শ্রেণীর নীম্নতম মাত্রার নীচ পর্য্যন্ত মোট উদাহরণ-সংখ্যা

i = শ্রেণী-অন্তর

N = মোট উদাহরণ-সংখ্যা হয়, তাহ'লে

$$\text{মধ্যমা} = l + \frac{\frac{N}{2} - r_2}{r_1 - r_2} \times i$$

টেব্‌ল্ নং ১৫-তে এই সূত্র প্রয়োগ করলে পাই—

$$\text{মধ্যমা} = ১৬ + \frac{৬৩ - ৬১}{৮১ - ৬১} \times ৪$$

$$= ১৬ + \frac{২}{২০} \times ৪ = ১৬ + \frac{২}{৫}$$

$$= ১৬ + \cdot ৪ = ১৬ \cdot ৪$$

মধ্যমার সুবিধা এই—

(ক) মোড্ অপেক্ষা নির্ভুলভাবে নির্দ্ধারণ করা যায়

(খ) বিষম উদাহরণের প্রভাব এতে বেশী দেখা যায় না—এ বিষয়ে মধ্যমা, মোডের গোত্র

(গ) যে তথ্যকে পরিমাপের ভিতর আনা যায় না সে সবের আলোচনায় মধ্যমা কাজে লাগে। শিশুর মানসিকশক্তি পরিমাপ করা অসম্ভব; কিন্তু মানসিকশক্তি অনুযায়ী একদল শিশুকে সাজান অসম্ভব নয়

(ঘ) শুধু মাঝের উদাহরণগুলি জানা থাকলেই চলে

কিন্তু অসুবিধা এই—

(ক) সরল গড়ের মত সহজে কোন গাণিতিক প্রক্রিয়ায় নির্দ্ধারণ করা যায় না

(খ) অসম বণ্টন হলে মধ্যমা নির্দ্ধারণ প্রায় অসম্ভব হয়ে পড়ে

(গ) উদাহরণগুলি সমষ্টিবদ্ধ হ'লে মধ্যমা নির্দ্ধারণ সহজ হয় না

একাদশ অধ্যায়

সাধারণ গড় (Arithmetic Average) :

একটা সমষ্টির শ্রেণীগুলির মান যোগ করে মোট শ্রেণী-সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিলেই পাওয়া যায় "সাধারণ গড়"। সাধারণ গড় আবার দুই প্রকারের—(১) সরল গড় ও (২) গুরুত্ববিশিষ্ট গড়। চারিটী গাছের দৈর্ঘ্য যদি যথাক্রমে ২, ৫, ৬ ও ৭ হয়, তাহ'লে ঐ গাছগুলির গড় দৈর্ঘ্য দাঁড়াবে—

$$\frac{২+৫+৬+৭}{৪} = \frac{২০}{৪} .$$

প্রত্যেকটী মাপ এইভাবে দেওয়া থাকলে সরল গড় নিরূপণ করাও সহজ হ'য়ে পড়ে। কিন্তু, ধর, পাঁচজন লোকের আয় এই রকম—২জনের প্রত্যেকের আয় বছরে ২০০০৲ টাকা; আর, বাকী ৩ জনের প্রত্যেকের আয় বছরে ৩০০০৲ টাকা। লোকগুলির গড় আয় নিরূপণ করতে হ'লে, ২০০০৲ সঙ্গে ৩০০০৲ টাকা যোগ দিয়ে ২ দিয়ে ভাগ করলে গড় পাব না। এখানে ২০০০৲ টাকার গুরুত্ব রয়েছে;—২ জন এই হারে আয় করে; সুতরাং, ২০০০৲ টাকার গুরুত্ব হ'ল ২। তেমনি, ৩০০০৲ টাকার গুরুত্ব রয়েছে ৩। সুতরাং, এখানে গড় নিরূপণ করতে হলে করতে হবে—

$$\frac{২০০০ \times ২ + ৩০০০ \times ৩}{৫} = \frac{১৩০০০}{৫} = ২৬০০৲ \text{ টাকা।}$$

গুরুত্ব দিয়ে এইভাবে যে গড় নিরূপণ করা হয় তাকে বলা হয় গুরুত্ববিশিষ্ট গড় (Weighted Average)। সরল গড়ে প্রত্যেক দফাকে মাত্র একবারই গণণার মধ্যে আনা হয়। এক বা একাধিক দফা যদি আয়তনে একইরূপ হয় তাহ'লে সেগুলির পুনরাবৃত্তি করা হয়। ধর, একটী ব্যাঙ্কের শেয়ারের দর কোন-একদিন ওঠা-নামা করেছে এই রকম—২৫৵০, ২৮৷৵০, ২৫৲, ২৭৵০, ২৫৸০, ২৪৸০,

২৫৸০, ২৭৸০, ২৫৶০ ও ২৫।০। দেখা যাচ্ছে শেয়ারের দর ওঠা-নামা করেছে ১০বার ; মোট—২৬০৲

$$\text{অতএব, গড় দর}—\frac{২৬০}{১০}=২৬৲$$

সরল গড়গুলিকে যোগ করে আবার যুগ্ম (composite) গড় পাওয়া যেতে পারে।

টেবল্ নং ১৬

সিডিউল্-ভুক্ত ব্যাঙ্কের সেভিংস্ আমানৎ—ভারতবর্ষ

মাস	সেভিংস আমানৎ (লক্ষ টাকা)	মাস	সেভিংস আমানৎ (লক্ষ টাকা)
এপ্রিল '৪৬	১২৩,৩৮	অক্টোবর '৪৬	১৩৩,৬১
মে ,,	১২৫,৩৩	নভেম্বর ,,	১৩৩,৬৮
জুন ,,	১২৬,৯২	ডিসেম্বর ,,	১৩৩,৫২
জুলাই ,,	১২৮,১৩	জানুয়ারী ,,	১৩৩,৫৫
আগষ্ট ,,	১৩০,০১	ফেব্রুয়ারী ,,	১৩৩.৫৪
সেপ্টেম্বর	১৩১,৯৭	মার্চ্চ ,,	১৩৩,০৪
			১,৫৬,৫৬৮

$$\text{গড় সেভিংস আমানৎ}—\frac{১৫৬৫৬৮}{১২}=১৩,০৪৭ \text{ লক্ষ টাকা}$$

টেবল্ নং ১৭

(গুরুত্ব-বিশিষ্ট গড়)

মজুরদের সাপ্তাহিক আয়

সাপ্তাহিক আয় (১)	মজুর সংখ্যা (২)	গুণফল [(১)×(২)]
৩০৲	১০০	৩,০০০
৩৭৲	৪১১	১৫,২০৭
৪৫৲	৫৯৭	২৬,৮৬৫
৪৮৲	৪৮০	২৩,০৪০
৫২৲	৮০	৪,১৬০
৬০৲	৫০	৩,০০০
মোট—	১,৭১৮	৭৫,২৭২

$$\text{গড়}=\frac{৭৫,২৭২}{১,৭১৮}=৫৩\text{·}৮১$$

এখানে, (২) নং স্তম্ভের সংখ্যা-গুলিকে (১) নং স্তম্ভের সংখ্যাগুলি দিয়ে গুণ করে, গুণফলগুলির যোগফলকে, মোট মজুর-সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে পাওয়া গেছে 'গড়'। কোন কোন ক্ষেত্রে টেব্‌লে যে সব তথ্য পাওয়া যায় সেগুলি এমনভাবে দেওয়া থাকে যে সঠিকভাবে গড় নিরূপণ অসম্ভব হ'য়ে পড়ে, কেননা, গড় নিরূপণ করতে হ'লে যে 'লব' প্রয়োজন হয় তা নির্ভুলভাবে কোনমতেই পাওয়া যায় না। একটা উদাহরণ নেওয়া যাক্---

টেবল্ নং ১৮

পরীক্ষার নম্বর

নম্বর	কতজন ছাত্র পেয়েছে
৩০--৩৪	১৭
৩৫-৩৯	৮
৪০-৪৪	২০
৪৫-৪৯	৪৮
৫০-৫৪	১৫
৫৫-৫৯	৭
৬০-৬৪	৪
৬৫-৬৯	৩
৭০-৭৪	১
	১২৩

ছাত্ররা এত বিভিন্ন রকমের নম্বর পেয়েছে যে, প্রায় একই ধরণের নম্বর যারা পেয়েছে, তাদের এই টেব্‌লে একই শ্রেণীভুক্ত করা হয়েছে; যেমন, ২০জন পেয়েছে ৪০ থেকে ৪৪এর ভিতর নম্বর, ৪৮জন পেয়েছে ৪৫ থেকে ৪৯এর ভিতর নম্বর, ইত্যাদি। ছাত্ররা গড়ে কত নম্বর পেয়েছে জানা যায়— $\frac{\text{মোট নম্বর}}{\text{মোট ছাত্র-সংখ্যা}}$ রেশিও থেকে; কিন্তু, মুস্কিল হচ্ছে, ছাত্ররা মোট কত নম্বর পেয়েছে সেইটে বার করাই (অর্থাৎ এই রেশিওর 'লব' বার করা)। অথচ, আলোচনার জন্য এই ধরণের টেবল্ থেকে গড় বার করা একান্ত প্রয়োজন হ'য়ে পড়ে। এটা বার করার একটা সহজ উপায় আছে। ছাত্ররা সবশুদ্ধ মোট কত নম্বর পেয়েছে সেইটাই

আমাদের জানা দরকার। মোট ১২৩জন ছাত্রর মধ্যে ২০জন পেয়েছে নম্বর ৪০ থেকে ৪৪এর ভিতর; মোট ছাত্র-সংখ্যার নম্বরের ভিতর এই ২০জনের নম্বরও থাকবে। এই ২০জন ছাত্র মোট কত নম্বর পেয়েছে বলতে না পারলেও, আমরা বলতে পারি যে, এই ২০জনের মোট নম্বর থাকবে (২০ × ৪০) = ৮০০ এবং (২০ × ৪৪) = ৮৮০র ভিতর; অর্থাৎ, ৮০০র বেশী আর ৮৮০র কম। ৪০ থেকে ৪৪এর ভিতর যখন নম্বর পেয়েছে এই ২০জন, তখন এমন হতে পারে যে বিশ জনের প্রত্যেকেই পেয়েছে ৪০ অথবা প্রত্যেকেই পেয়েছে ৪৪, অথবা, ৪০ থেকে ৪৪এর মধ্যে ছড়িয়ে আছে তাদের সংখ্যা। সুতরাং, এই ২০জন ঠিক কত নম্বর পেয়েছে না জানলেও আমরা জানি যে তাদের মোট নম্বর সংখ্যা ৮০০ থেকে ৮৮০র ভিতর সীমাবদ্ধ। এখন যদি ধরে নেওয়া যায় যে ৪০ থেকে ৪৪এর মধ্যে ছাত্র-সংখ্যা সমানভাবে পরিব্যাপ্ত তাহ'লে ৪০ ও ৪৪এর মাঝামাঝি, অর্থাৎ, ৪২কে ৪০-৪৪ শ্রেণীর গড় ধরা যেতে পারে। এই গড় ধরে, বলা যায় যে ২০জন ছাত্র মোট নম্বর পেয়েছে (৪২ × ২০) = ৮৪০। এই যুক্তির উপর নির্ভর করে টেবল্‌টাকে এইভাবে লেখা যায়—

টেব্‌ল্‌ নং ১৯

পরীক্ষার নম্বর

নম্বর	মধ্য-বিন্দু (m)	ছাত্র-সংখ্যা (f)	$(m) \times (f)$
৩০-৩৪	৩২	১৭	৫৪৪
৩৫-৩৯	৩৭	৮	২৯৬
৪০-৪৪	৪২	২০	৮৪০
৪৫-৪৯	৪৭	৪৮	২২৫৬
৫০-৫৪	৫২	১৫	৭৮০
৫৫-৫৯	৫৭	৭	৩৯৯
৬০-৬৪	৬২	৪	২৪৮
৬৫-৬৯	৬৭	৩	২০১
৭০-৭৪	৭২	১	৭২
		১২৩	৫৬৩৬

$$\text{গড়} = \frac{৫৬৩৬}{১২৩} = ৪৫\text{'}৮২$$

অতএব ফ্রিকোয়েন্সী টেব্‌ল্ থেকে গড় নিরূপণ করতে গেলে প্রথমে শ্রেণী-অন্তরের মধ্য-বিন্দু (স্তম্ভ ২) নিতে হবে এবং উদাহরণ-সংখ্যাকে মধ্য-বিন্দু-সংখ্যা দিয়ে গুণ করে (mf) গুণফলগুলি যোগ করে মোট উদাহরণ-সংখ্যা (f) দিয়ে ভাগ করলেই পাওয়া যাবে গড়।

গণিতের সাহায্যেও সাধারণ গড় নিরূপণ করা যায় নিম্নলিখিত সূত্র ধরে—

যদি

$x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n$ বোঝায় বিভিন্ন শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা

N — মোট উদাহরণ-সংখ্যা হয়, তাহ'লে—

$$\text{সাধারণ গড়} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdots\cdots x_n}{N}$$

$$\text{অর্থাৎ, সংক্ষেপে, সাঃ গড়} = \frac{\Sigma x}{N}$$

[Σ (উচ্চারণ, সিগ্‌মা), x-এর বিভিন্ন মানের যোগফল বোঝায়]

পূর্ব্বে শেয়ারের দর সম্বন্ধে যে উদাহরণ নিয়েছি তা থেকে এই সূত্র অনুসারে পাই—x_1 = ২৫।৵০, x_2 = ২৮।৵০, x_3 = ২৫৲ ইত্যাদি

অতএব, সাধারণ গড় =

২৫৶ + ২৮।৶ + ২৫৲ + ২৭৶ + ২৫৸ + ২৪৸ + ২৫৸ + ২৭৸ + ২৫৶ + ২৫।০
――――――――――――――――――――――――――
১০

= ২৬০ / ১০ = ২৬

এই সূত্র থেকেই পাই যে, সাধারণ গড় থেকে প্রত্যেক শ্রেণীর উদাহরণের যা ব্যতিক্রম সেগুলি যোগ করলে (বীজগণিত অনুযায়ী) পাই শূন্য।

যদি, x-এর মান যথাক্রমে—

১০, ১৬, ১৭, ৮৫, ৬৭, ৫২, ১৮, ২৩....ফিট ধরা যায়, তা'হলে—

গড় = $\frac{\Sigma x}{N}$ = ২৮৮ / ৮ = ৩৬ ফিট

ব্যতিক্রম পাই—

৩৬ − ১০ = + ২৬
৩৬ − ১৬ = + ২০
৩৬ − ১৭ = + ১৯
৩৬ − ৮৫ = − ৪৯
৩৬ − ৬৭ = − ৩১
৩৬ − ৫২ = − ১৬
৩৬ − ১৮ = + ১৮
৩৬ − ২৩ = + ১৩

\+ ৯৬
− ৯৬

০ (শূন্য)

যদি গুরুত্ব নির্দেশ করবার জন্য $w_1, w_2, w_3 \cdots\cdots$ প্রভৃতি সঙ্কেত ব্যবহার করা হয়, তাহ'লে—

$$\text{গুরুত্ববিশিষ্ট গড়} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 \cdots\cdots w_n}.$$

$$= \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{\Sigma wx}{N}$$

টেব্‌ল্ নং ১৯-এ $\Sigma\ (wx) =$ ৫৬৩৬

এবং $\Sigma\ (w) = N =$ ১২৩

অতএব, গড় = $\frac{৫৬৩৬}{১২৩}$ = ৪৫·৮২

সংক্ষিপ্ত উপায়ে গড় নির্দ্ধারণ :

সংক্ষিপ্ত উপায়ে গড় নিরূপণ করতে হ'লে—

(১) যে-কোন সংখ্যাকে গড় বলে ধর

(২) সেই সংখ্যা থেকে প্রত্যেক শ্রেণী-সংখ্যার ব্যতিক্রম (ডেভিয়েশান) নির্ণয় কর—যোগ ও বিয়োগের চিহ্নগুলি যেন ঠিক্ ঠিক্ থাকে

(৩) ব্যতিক্রমগুলি যোগ করে মোট শ্রেণী-সংখ্যা দিয়ে ভাগ দাও

(৪) নির্ণীত ভাগফলকে যোগ দাও কল্পিত গড়ের সঙ্গে। ফল যা পাওয়া গেল সেটাই হ'ল প্রকৃত গড়।

এই উপায়ে গড় নির্ণয়ের পদ্ধতি নীচে ব্যাখ্যা করা হয়েছে—

টেবল্—নং ২০

উদাহরণ	কল্পিত গড়	কল্পিত গড় থেকে ব্যতিক্রম
৫০৯	৫০০	+৯
৫১২	৫০০	+১২
৪৬৫	৫০০	−৩৫
৪৯৮	৫০০	−২
৪৯০	৫০০	−১০
৪৯২	৫০০	−৮
		+২১
		−৪৫
		−২৪

এখানে শ্রেণী-সংখ্যা হ'ল = ৬

−২৪ ÷ ৬ = −৪

অতএব, প্রকৃত গড় = ৫০০ + (−৪) = ৪৯৬

ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ থেকে সংক্ষিপ্ত উপায়ে গড় নিরূপণ করতে হ'লে একটু বিভিন্ন উপায় অবলম্বন করতে হবে—

(১) প্রথমে তথ্যগুলিকে শ্রেণী অনুযায়ী পর পর সারবন্দী করে সাজাও

(২) প্রত্যেক শ্রেণীর মধ্য-বিন্দু স্থির কর

(৩) প্রায় মাঝামাঝি কোন শ্রেণীর মধ্য-বিন্দুকে কল্পিতগড় বলে ধর

(৪) শ্রেণী-অন্তর একক ধরে কল্পিত গড় থেকে প্রত্যেক শ্রেণীর মধ্য-বিন্দুর ব্যতিক্রমকে একটী স্তম্ভে সাজাও; যে শ্রেণীর মধ্য-বিন্দুকে গড় কল্পনা করা হয়েছে সেই শ্রেণীর ব্যতিক্রম হবে শূন্য; আর ঠিক নীচের শ্রেণীর ব্যতিক্রম হ'বে (−১) ও ঠিক্ উপরের শ্রেণীর ব্যতিক্রম হবে (+১)। এইভাবে কল্পিত গড় থেকে দূরত্ব যত বাড়বে, ব্যতিক্রমও হবে তত বেশী।

(৫) প্রত্যেক শ্রেণীর ব্যতিক্রমকে শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে গুণ কর; যোগ-বিয়োগ চিহ্ন যেন ঠিক্ ঠিক্ লেখা হয়

(৬) এবার এই শেষ স্তম্ভের সংখ্যাগুলি যোগ কর (বীজগণিত অনুযায়ী)

(৭) যোগফলকে মোট উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে ভাগ কর

(৮) এই ভাগফলকে শ্রেণী-অন্তর দিয়ে গুণ কর

(৯) কল্পিত গড়ের সঙ্গে এই গুণফল যোগ কর (বীজগণিত অনুযায়ী)। ফলে আমরা পাব প্রকৃত গড়

নীচের উদাহরণে প্রক্রিয়াটা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। লক্ষ করতে হবে যে ব্যতিক্রম নির্ণয়ের সময় শ্রেণী-অন্তরের গুণিতকই শুধু নেওয়া হয়েছে।

টেবল্ নং ২১

মজুরদের সাপ্তাহিক আয়

সাপ্তাহিক আয় টাকা	মধ্য-বিন্দু (m)	মজুর সংখ্যা (f)	ব্যতিক্রম (d^1)	গুণফল $f \times d^1$
৪ থেকে ৭·৯৯	৬	৮	−৩	−২৪
৮ " ১১·৯৯	১০	২৮	−২	−৫৬
১২ " ১৫·৯৯	১৪	২৫	−১	−২৫
১৬ " ১৯·৯৯	১৮	২০	০	০
২০ " ২৩·৯৯	২২	৯	+১	+ ৯
২৪ " ২৭·৯৯	২৬	১০	+২	+২০
২৮ " ৩১·৯৯	৩০	১২	+৩	+৩৬
৩২ " ৩৫·৯৯	৩৪	৭	+৪	+২৮
৩৬ " ৩৯·৯৯	৩৮	৭	+৫	+৩৫
		১২৬		−১০৫
				+১২৮

এখানে কল্পিত গড় = ১৮

কল্পিত গড় হইতে ব্যতিক্রম = −১০৫
+১২৮
+ ২৩

$$\text{প্রকৃত গড়} - \text{কল্পিত গড়} = \frac{\text{ব্যতিক্রম সমষ্টি}}{\text{উদাহরণ সমষ্টি}} \times \text{শ্রেণী-অন্তর}$$

$$= \frac{২৩}{১২৬} \times ৪ = \frac{৪৬}{৬৩}$$

অতএব, $\text{প্রকৃত গড়} = \text{কল্পিত গড়} + \frac{৪৬}{৬৩}$

$$= ১৮ + \frac{৪৬}{৬৩} = ১৮·৭$$

সাধারণ গড়ের সুবিধা এই যে—

(১) কেবলমাত্র যোগ ও ভাগের সাহায্যেই সাধারণ গড় নিরূপণ করা চলে এবং সেজন্য চিত্রাঙ্কনের সাহায্য নেওয়াও একান্ত আবশ্যক নয়; সংখ্যাগুলিকে ধারাবাহিকভাবে সাজানরও প্রয়োজন হয় না

(২) রাশিগুলির মধ্যে বিষম ব্যতিক্রম থাকলে গড়ের মধ্যে তার গুরুত্ব দেখা যায়

(৩) সাধারণ গড় বোঝা ও হিসাব করা সহজ

(৪) একটা সমষ্টির মধ্যে যতগুলি রাশি থাকে গড় নির্দ্ধারণে সবগুলিরই স্থান আছে

(৫) শ্রেণী-সংখ্যা ও শ্রেণীর উদাহরণ-সমষ্টি জানা থাকলে গড় সহজেই নির্ণয় করা যায়, সেজন্য প্রত্যেক শ্রেণীয় উদাহরণ-সংখ্যা আলাদা-আলাদা করে জানা প্রয়োজন হয় না। ভারতের মোট জন-সংখ্যা যদি জানা থাকে এবং ভারতে কত চিনি আমদানী ও উৎপাদন হয় জানা থাকে, তাহ'লে, হিসাব করে সহজেই বলে দেওয়া যায় ভারতে মাথাপিছু গড়ে কত চিনি লাগে; তারজন্য ব্যক্তি-বিশেষ কত চিনি খায় জানার প্রয়োজন হয় না

তবে, এই গড়ে অসুবিধাও আছে বৈকি—

(১) ফ্রিকোয়েন্সী গ্রাফে এই গড়ের স্থান নির্দ্দেশ করা কঠিন

(২) কোন সিরিজের চরম প্রান্তগুলি না পেলে গড় নির্ণয় সঠিক হয় না

বর্গীয় গড় (Geometric Average):

n সংখ্যক রাশিকে গুণ করে n-th মূল বার করলেই পাওয়া যায় বর্গীয় গড় (Geometric average)।

যদি $g =$ বর্গীয় গড়

$x =$ রাশি

$n =$ রাশি সংখ্যা হয়,

তাহ'লে, $g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \cdots\cdots x_n}$

একটা সামান্য উদাহরণ নি। ২, ৪, ৮ এই রাশি তিনটার বর্গীয় গড় নির্ণয় করতে হবে—

$$g=\sqrt[৩]{২\times ৪\times ৮}=\sqrt[৩]{৬৪}=৪$$

এই হিসাব থেকে বোঝা যাচ্ছে যে, কোন রাশি যদি শূন্য হয় তাহ'লে গড় হবে শূন্য। বর্গীয় গড় নির্ণয় করতে লগারিথিম্ প্রয়োগ করলে গড় নির্ণয় করা সহজ হয়। লগারিথিম্ প্রয়োগ করলে গড় নির্ণয়ের সূত্রটী দাঁড়াবে—

$$g=\sqrt[n]{x_1\times x_2\times x_3\cdots\cdots x_n}$$

অথবা, $$\log g=\frac{\log x_1+\log x_2+\cdots\cdots\log x_n}{N}$$

$$=\frac{\Sigma\log x}{N}$$

এখানে দেখছি যে, বর্গীয় গড়ের লগারিথিম্

= বিভিন্ন রাশির লগারিথিমের সাধারণ গড়ের সমান

গুরুত্ববিশিষ্ট রাশির গড় নিরূপণ করতে গেলে রাশির সূচক হিসাবে ব্যবহার করতে হবে গুরুত্বটীকে—

যদি, গুরুত্ব $=w$ হয়,

তাহ'লে—

$$g=\sqrt[n]{x_1^{w_1}\times x_2^{w_2}\times x_3^{w_3}\times\cdots\cdots x_n^{w_n}}$$

সাধারণ গড় নিরূপণে গুরুত্বগুলি যেভাবে ব্যবহার করা হয়েছিল এখানেও সেই একই ধারা প্রয়োগ করা হয়েছে। এখানে বোঝা যাচ্ছে যে x_1 গণণায় আন্‌তে হবে w_1 বার। লগারিথিম্ প্রয়োগ করলে সূত্রটী দাঁড়ায়—

$$\log g=\frac{w_1\log x_1+w_2\log x_2\cdots\cdots w_n\log x_n}{N}$$

$$=\frac{\Sigma(w\log x)}{N}$$

নীচে যে উদাহরণ দেওয়া হ'ল তা দেখলেই প্রক্রিয়াটী বোঝা সহজ হবে—

টেবল্—নং ২২

পাইকারী দরের সূচক-সংখ্যা

বিষয়	কটা জিনিষ ধরা হয়েছে (f)	সূচক-সংখ্যা (m)	log (m)	$f \times \log m$ [(২) × (৪)]
১	২	৩	৪	৫
কৃষি পণ্য	১৯	৩১৩.৮	২.৪৯৬৬	৪৭.৪৩৫৪
কাঁচা মাল	১৭	২৩৫.৩	২.৩৭১৬	৪০.৩১৭২
অন্যান্য পণ্য	২২	২৮০.০	২.৪৪৭২	৫৩.৮৩৮৪
কারখানাজাত পণ্য	২৪	২৫৯.১	২.৪১৩৫	৫৭.৯২৭০
রপ্তানিযোগ্য পণ্য	১৬	২৯৬.৮	২.৩৯২৩	৩৮.২৭৬৮
খাদ্য পণ্য	১০	২৫৬.৮	২.৪০৯৬	২৪.০৯৬০
মোট	১০৮			২৬১.৮৮৭৮

$$\text{Log}(g) = \frac{\Sigma (w \log x)}{N} = \frac{২৬১.৮৮৭৮}{১০৮}$$

$$= ২.৪২৪৮$$

$$\text{অতএব, } g = \text{Antilog} \frac{\Sigma (w \log x)}{N} = ২৬৬$$

রেশিও অবলম্বন করে যখন গড় নির্ণয় করা প্রয়োজন হয়, তখন এই বর্গীয় গড়ই কাজে লাগে। অর্থনৈতিক আলোচনায় পণ্যর দরের সূচক-সংখ্যা নিয়ে আলোচনা করার সময় এই গড় কাজে লাগে। ধর, দুটী পণ্যের দর নিয়ে দেখা যাচ্ছে যে একটী বেড়েছে দশ গুণ (অর্থাৎ সূচক-সংখ্যা ১০০ থেকে হয়েছে ১০০০), আর, অপরটী কমেছে ১০ ভাগ (অর্থাৎ সূচক ১০০ থেকে নেমে হয়েছে ১০)। তা'হলে গড়ে কি হারে দর বেড়েছে বা কমেছে? দুটী সংখ্যার

(ক) সাধারণ গড় $= \frac{১০০০ + ১০}{২} = ৫০৫$

আর, (খ) বর্গীয় গড় $= \sqrt{১০০০ \times ১০} = ১০০$

সাধারণ গড় থেকে দেখা যাচ্ছে গড়ে দর বেড়েছে পাঁচগুণের ওপর; কিন্তু বর্গীয় গড়ে দেখছি কোন তারতম্য হয়নি। সুতরাং, রেশিও নিয়ে গড় নির্ণয় করতে গেলে বর্গীয় গড় প্রয়োগই যুক্তিসঙ্গত, তাতে সঠিক

রূপটিই ফুটে ওঠে। গড়ে সুদের চক্রবৃদ্ধি হার কত নির্ণয় করতে গেলেও বর্গীয় গড়ই বেশী উপযোগী।

যদি P_0 = আসল টাকা

n = যত বছর টাকা খেটেছে

r = সুদের হার

P_n = n বর্ষ শেষে সুদ-আসল হয়, তাহ'লে

n বর্ষ পরে P_0 টাকা r হারে সুদে-আসলে দাঁড়াবে—

$$P_n = P_0\,(1+r)^n$$

অথবা $$(1+r)^n = \frac{P_n}{P_0}$$

" $$1+r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}}$$

অতএব $$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

যদি হাজার টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদে ১২ বছর পরে সুদে-আসলে দাঁড়ায় ১৬০০৲ টাকা, তাহ'লে দেখছি যে শতকরা ৬০৲ টাকা ১২ বছরে বেড়েছে। তাহ'লে বার্ষিক সুদের হার কত? সাধারণ গড় ধরলে পাই শতকরা ৫৲ টাকা; কিন্তু এটা ঠিক নয়, কেন না ঠিক এহারে বাড়ে নি। প্রকৃত সুদের হার হল এই:

$$r = \sqrt[১২]{\frac{১৬০০}{১০০০}} - ১$$

$$= \sqrt[১২]{১\cdot৬০} - ১$$

$$= ১\cdot০৪ - ১$$

$$= \cdot০৪, \text{ বা } ৪\%.$$

বাড়তি বা কমতি হার নিয়ে গড় নির্ণয় করতে গেলে সাধারণ গড় নিলেই ভুল হবে।

দ্বাদশ অধ্যায়

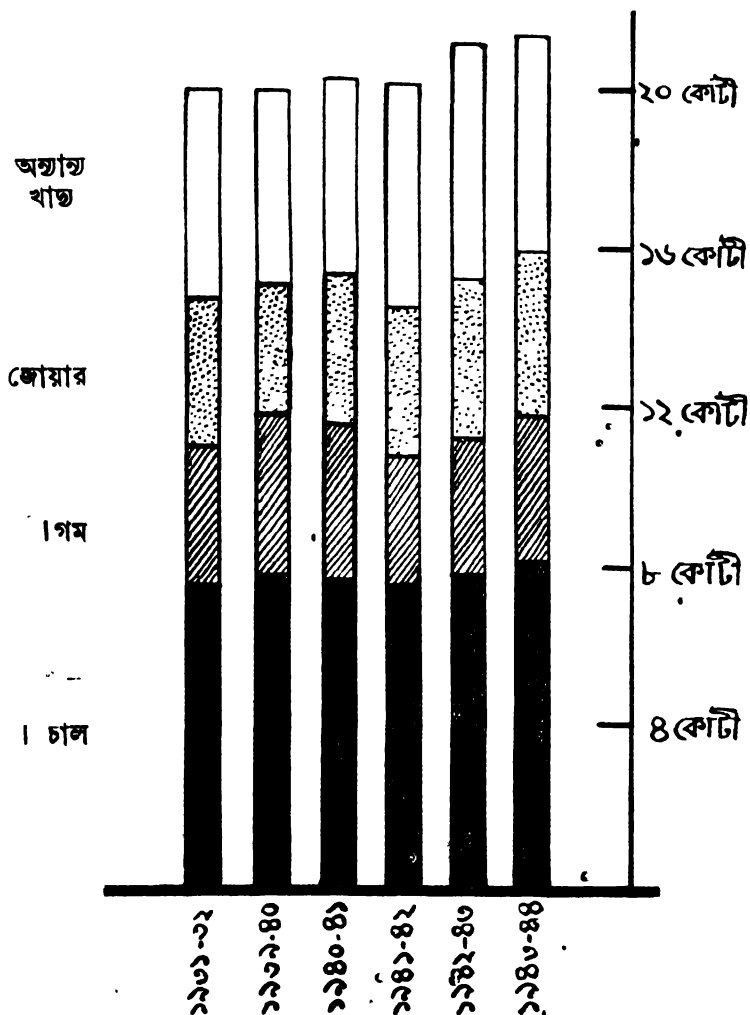
চিত্র (Diagram) ঃ

সংখ্যা-বিজ্ঞানের অন্যতম মুখ্য উদ্দেশ্য হচ্ছে যে, যে-সব তথ্য সংখ্যায় ব্যক্ত করা হয় সেগুলিকে সহজবোধ্য করে তোলা। সহজবোধ্য করার নানা উপায় আবিষ্কৃত হয়েছে; চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা তার মধ্যে অন্যতম।

ভৌগলিক অবস্থানের পরিবর্ত্তনের সঙ্গে সঙ্গে অনেক ঘটনার পরিবর্ত্তন হয়। এই ধরণের ঘটনার পরিবর্ত্তন সহজভাবে বুঝিয়ে দেবার জন্যে ব্যবহার করা হয় কার্টোগ্রাম বা সংখ্যা-বিজ্ঞানসম্মত মানচিত্র। এই উদ্দেশ্যে অঙ্কিত মানচিত্র, উদ্দেশ্য-হিসাবে নানা ধরণের হ'তে পারে। একই মানচিত্রে নানা ঘটনার সমাবেশ করা সম্ভব। বিবিধ রঙের প্রলেপ দিয়ে বা বিবিধ সঙ্কেত ব্যবহার করে একই মানচিত্রে নানা বিষয়ের বর্ণণা দেওয়া যেতে পারে। মানচিত্রে একাধিক রঙ ব্যবহার করলে ছাপাই খরচা পড়ে অনেক; তাই বিভিন্নতা বোঝাতে রঙের বদলে বহুক্ষেত্রে রেখাই নানাভাবে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। অনেক সময় সংবাদপত্রাদিতে আবহাওয়া ও বৃষ্টিপাতের তারতম্য বোঝাতে এই ধরণের মানচিত্রের ব্যবহার দেখা যায়। কার্টোগ্রামে ফুট্‌কির ব্যবহারও দেখা যায়। ভারতে রিজার্ভ ব্যাঙ্ক অব্ ইণ্ডিয়া, ব্যাঙ্ক-সংক্রান্ত যে বার্ষিকী প্রকাশ করেন তাতে বিভিন্ন প্রদেশে ব্যাঙ্কের প্রসার কি রকম বোঝাতে এই ধরণের ফুট্‌কি-দেওয়া-মানচিত্র ব্যবহার করে থাকেন।

সংখ্যায় প্রকাশিত তথ্য সহজবোধ্য করার জন্যে, যে চিত্র ব্যবহার করা হয় সেই চিত্রকে বলা হয় পিক্টোগ্রাম্। পিক্টোগ্রাম্ নানা ধরণের হ'তে পারে। সাধারণতঃ বার ডায়াগ্রাম্ বা "অর্গল-চিত্র"ই বেশী ব্যবহৃত হয়ে থাকে। সংখ্যা-বিজ্ঞানে পরিমাণ বোঝাতে সাধারণতঃ পূর্ণ-সংখ্যাই

ব্যবহার করা হয়ে থাকে ব'লে সংখ্যাগুলিকে রেখার সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু, রেখা সহজে নজর টানেনা বলে সাধারণতঃ রেখার বদলে 'অর্গল' (বার ডায়াগ্রাম) ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

চিত্র নং ১

"বার ডায়াগ্রাম" বা "অর্গল চিত্র"

টেবল্ নং ২৩

ভারতবর্ষে খাদ্যশস্য চাষের জমি

বর্ষ	জমির পরিমাণ—হাজার একরে				
	চাউল	গম	জোয়ার	অন্যান্য খাদ্যশস্য	মোট খাদ্যশস্য
১৯৩১-৩২	৭৬,৩৮১	৩৪,৭০১	৩৭,৪২০	৫২,৪০০	২০০,৯০২
১৯৩৯-৪০	৭৮,১১৫	৩৪,৮৭৬	৩৬,৯৬৮	৪৯,৮০২	১৯৯,৭৬১
১৯৪০-৪১	৭৬,৮৬৭	৩৫,৭১২	৩৬,৯৮১	৫১,১৯৮	২০০,৭৫৮
১৯৪১-৪২	৭৭,৩৭৬	৩৪,৮৮৮	৩৮,০০৬	৫২,৪৫৩	২০২,৭২৩
১৯৪২-৪৩	৭৯,০৫২	৩৫,৭০৫	৪০,০১২	৫৭,৬৬৭	২১২,০৩৬
১৯৪৩-৪৪	৮৪,৯৩৮	৩৪,৮৫৯	৩৯,৪২৫	৫৪,৯৪৫	২১৪,১৬৭

আবার একই অর্গল চিত্রে একটা সমষ্টির বিভিন্ন অংশ বোঝান যায়। সেজন্যে বিভিন্ন অংশকে এরকমভাবে চিহ্নিত করতে হয় যাতে এক অংশ থেকে আর এক অংশকে পৃথক করা যায়। টেবল্ নং ২৩-এর তথ্যগুলিকে ১নং চিত্রে অর্গলের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়েছে।

একটি সমষ্টিকে একশ' ধরে সেই সমষ্টির বিভিন্ন অংশকে শতকরা অংশ হিসেবে ব্যক্ত করা যায়। এইরূপ শতকরা-অংশে-বিভক্ত সমষ্টিকে প্রকাশ করা যায় দুই ভাবে — অর্গল চিত্র (বার ডায়াগ্রাম) দিয়ে

টেবল্ নং ২৪

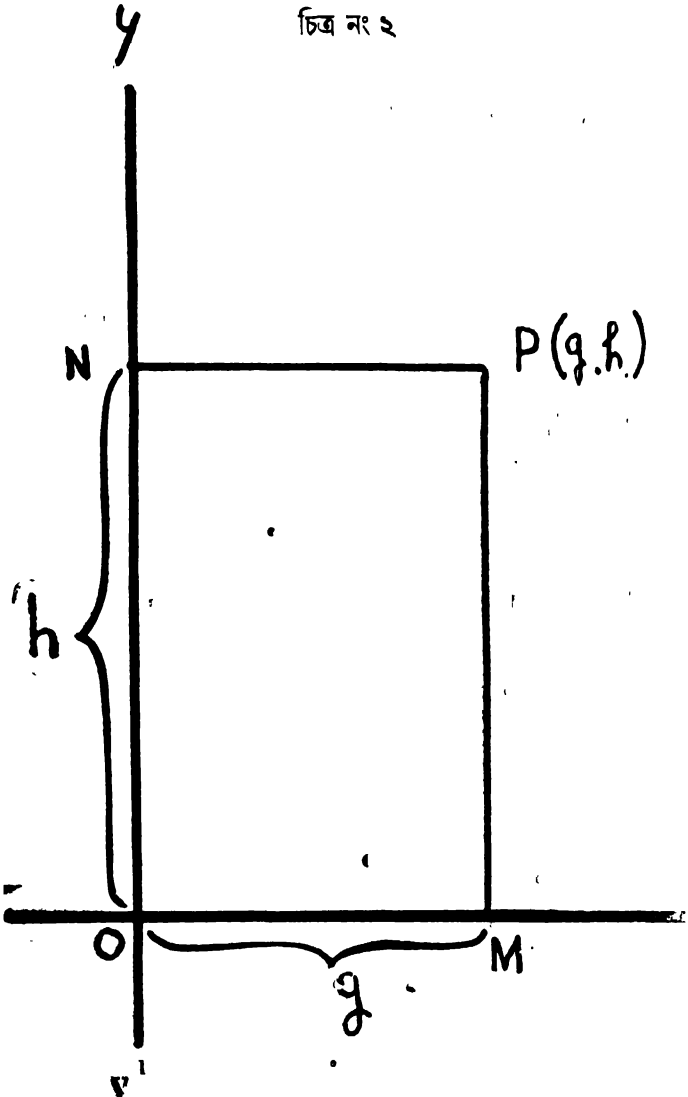
খাদ্যশস্য—কর্ষিত জমি

হাজার একরে

	১৯৩১—৩২			১৯৪৩—৪৪		
	ভূমির পরিমাণ	%	ডিগ্রি	ভূমির পরিমাণ	%	ডিগ্রি
মোট খাদ্যশস্য—	২,০০,৯০২	১০০	৩৬০	২,১৪,১৬৭	১০০	৩৬০
চাউল—	৭৬,৩৮১	৩৮	১৩৭	৮৪,৯৩৮	৪০	১৪৪
গম—	৩৪,৭০১	১৭	৬১	৩৪,৮৫৯	১৬	৫৭
জোয়ার—	৩৭,৪২০	১৯	৬৮	৩৯,৪২৫	১৮	৬৫
অন্যান্য খাদ্যশস্য—	৫২,৪০০	২৬	৯৪	৫৪,৯৪৫	২৬	৯৪

অথবা বৃত্ত চিত্রে (পাই ডায়াগ্রাম)। অর্গল চিত্রে, সমষ্টিকে যেমন একশ' ধরে অংশগুলির শতকরা ভাগ নির্ণয় করা হয়, তেমনি, বৃত্ত চিত্রে সমষ্টিকে ৩৬০° ডিগ্রি ধরে অংশগুলির ডিগ্রির পরিমাণ নির্ণয় করা হয়। ২৪নং টেব্‌লে হিসাবটা বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে।

চিত্র নং ২

গ্রাফ ঃ

কোন সমতলক্ষেত্রের উপর দুটী সরলরেখা যদি এমনভাবে টানা যায় যে, রেখা দুটী একটী অপরটীর উপর লম্ব হয়, তাহ'লে সেই সমতলক্ষেত্রের উপর অপর যে-কোন বিন্দুর অবস্থিতি রেখা দুটীর ছেদ-বিন্দুকে লক্ষ্য করে প্রকাশ করা যায়। ধর, XX^1 এবং YY^1 রেখা দুটী O বিন্দুতে পরস্পরকে এইভাবে ছেদ করেছে (চিত্র নং ২)। ঐ সমতলক্ষেত্রের উপর P নামে যে-কোন বিন্দু নেওয়া গেল; P হ'তে XX^1 ও YY^1 রেখা দুটীর উপর যথাক্রমে PM ও PN দুটী লম্ব টানা গেল; লম্ব দুইটি XX^1 ও YY^1 রেখাকে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। এখন যদি OM = g এবং ON = h ধরা যায়, তাহ'লে বলা যায় যে g ও h, P বিন্দুর ভুজ-কোটী (co-ordinates)। যে-কোন বিন্দুর ভুজকোটী এইভাবে স্থির করা চলে। যে-কোন বিন্দুই নেওয়া যাক্ না কেন তা O বিন্দুর হয় দক্ষিণে নয় বামে, বা উপরে নয় নীচে থাক্‌বেই। মূলবিন্দুর (origin) ডানদিকে যদি ভুজের অবস্থান হয় তাহ'লে সেটা হবে পজিটিভ্, আর, বামে হ'লে হবে নেগেটিভ্; তেম্‌নি কোটীও হবে পজিটিভ্ যদি থাকে মূলবিন্দুর উত্তরে, আর হবে নেগেটিভ্ যদি থাকে দক্ষিণে। গণিতশাস্ত্রের এই তত্ত্বটীকে সংখ্যা-বিজ্ঞানে কিভাবে লাগান যায় তা একটা উদাহরণ দেখ্‌লেই বোঝা যাবে।

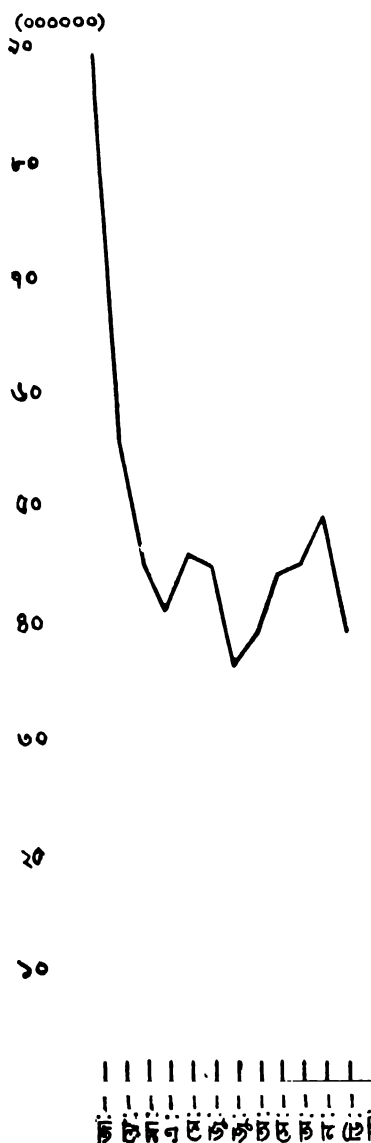
টেবল্ নং ২৫

পোষ্ট্যাল্ ক্যাশ-সার্টিফিকেট্ ১৯৪৬ বিক্রয়

মাস	টাকা	মাস	টাকা
জানুয়ারী	৮৯,০০,০০০৲	জুলাই	৩৬,০০,০০০৲
ফেব্রুয়ারী	৫৬,০০,০০০৲	অগাষ্ট	৩৯,০০,০০০৲
মার্চ্চ	৪৫,০০,০০০৲	সেপ্টেম্বর	৪৪,০০,০০০৲
এপ্রিল	৪১,০০,০০০৲	অক্টোবর	৪৫,০০,০০০৲
মে	৪৬,০০,০০০৲	নভেম্বর	৪৯,০০,০০০৲
জুন	৪৫,০০,০০০৲	ডিসেম্বর	৩৯,০০,০০০৲

ভুজ-কোটীর সহায়তায় এই তথ্যগুলিকে গ্রাফে প্রকাশ করা যায়। যদি X-অক্ষরেখার উপর নির্দেশ করা যায় বিভিন্ন মাস এবং Y-অক্ষরেখার

চিত্র—নং ৩

পোষ্ট্যাল ক্যাঃ শাঃ বিক্রয় ১৯৪৬

উপর নির্দ্দেশ করা যায় যত টাকার পোষ্ট্যাল ক্যাশ-সার্টিফিকেট বিক্রি হয়েছে সেটা, তাহ'লে পাওয়া যাবে নীম্নলিখিতরূপ চিত্র (চিত্র নং ৩)।

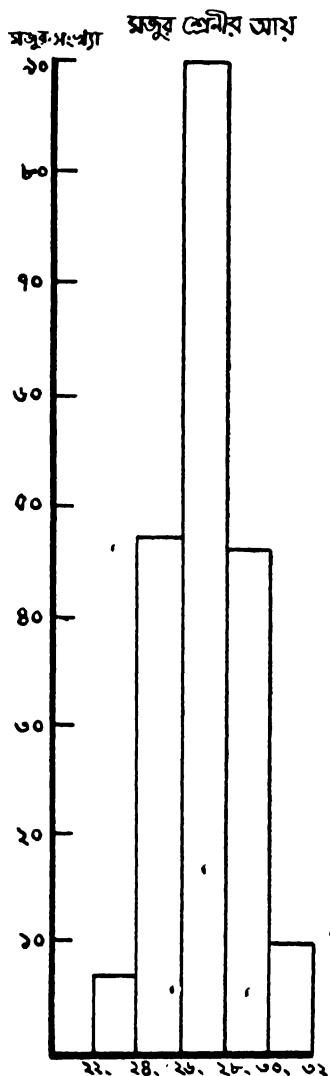
এই চিত্রে, যে-বিন্দু ১৯৪৬ সনের জানুয়ারী মাসে মোট কত টাকার পোষ্ট্যাল ক্যাশ সার্টিফিকেট বিক্রি হয়েছে নির্দ্দেশ করবে তার ভুজ-কোটী হচ্ছে ১ ও ৮৯, ০০, ০০০ ; তেমনি, জুন মাসের বিক্রের পরিমাণ নির্দ্দেশ করবে যে-বিন্দু, তার ভুজ-কোটী হ'ল ৬ ও ৪৫, ০০, ০০০ ইত্যাদি। সারা বছরের মধ্যে ক্যাশ-সার্টিফিকেট কি পরিমাণের বিক্রী হয়েছে সেই ধারাটা বুঝতে গেলে এই বিন্দুগুলিকে রেখা টেনে যোগ করা প্রয়োজন, যেমন এই চিত্রে করা হয়েছে।

ভুজ-কোটীর সাহায্যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করতে হ'লে দুটী বিভিন্ন পরিমাপ (রাশি) প্রয়োজন। উপরে যে উদাহরণ নিয়েছি তাতে মাস এবং ক্যাশ-সার্টিফিকেটের বিক্রয়-মূল্য হ'ল এই দুটী পরিমাপ। কালক্রমের সঙ্গে সঙ্গে মোট বিক্রির পরিমাণ পরিবর্ত্তিত হয় ; আঁকাবাঁকা রেখাটী পরিবর্তনের ঝোঁক ও পরিমাণ নির্দ্দেশ করে। সময় ও বিক্রয়ের পরিমাণ দুইই পরিবর্তনশীল। অর্থাৎ সময়ের যেমন পরিবর্তন হয়, তেমনি বিক্রির পরিমাণও পরিবর্ত্তিত হয়। চিত্র নং ৩-এ দেখছি যে ভুজ ও কোটী দুইই পরিবর্ত্তিত হচ্ছে ১ থেকে ১২-তে এবং ৮৯,০০,০০০ থেকে ৩৯, ০০, ০০০তে। সময়ের পরিবর্তন নির্দ্দেশ করা হয়েছে X-অক্ষরেখায় আর, বিক্রয়ের পরিবর্তন Y-অক্ষরেখায়। X-অক্ষরেখার রাশিগুলির একক ধরা হয়েছে যথেচ্ছাক্রমে ১ মাস ; এটাকে তিনমাস করলেও চল্তে পারত। সময়ের পরিবতন হয় স্বাধীনভাবে ; আমরা হিসাব করি সেই সময়ের মধ্যে কত টাকার সার্টিফিকেট বিক্রি হয়েছে। যে পরিবর্তনশীল রাশি বা বিষম রাশি (variable) স্বাধীনভাবে পরিবর্ত্তিত হয় তাকে বলে স্বাধীন বিষমরাশি (Independent variable) ; সাধারণতঃ, X-অক্ষ-রেখার উপর এদের স্থাপন করা হয়। অপর বিষম রাশিটীকে (variable) বলে অধীন বিষমরাশি (Dependent variable)। "সময়" যদি একটা বিষমরাশি হয়, তাহ'লে সাধারণতঃ সেটাকে স্থাপন করা হয় X অক্ষরেখার উপর।

হিষ্টোগ্রাম ঃ

ফ্রিকোয়েন্সী টেব্‌লে গ্রথিত তথ্যগুলিকে ভুজ-কোটীর সাহায্য নিয়ে চিত্রে

প্রকাশ করা যায়; চিত্রে প্রকাশ করলে বহু বৈশিষ্ট্যই পরিস্ফুট হয়ে ওঠে। টেবল্ নং ৮-এ যে তথ্য সন্নিবেশিত হয়েছে তাকে ৪নং চিত্রে প্রকাশ করা

চিত্র নং ৪

হিষ্টোগ্রাম বা "ব্লক চিত্র"

হ'ল। এই চিত্রে শ্রেণী-অন্তর নির্দ্দেশ করা হয়েছে X-অক্ষরেখার উপর, আর, শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা নির্দ্দেশ করা হয়েছে Y-অক্ষরেখার উপর—এখানে লক্ষ্য করবার বিষয় যে ভুজের স্কেল সুরু করা হয়েছে ২০ থেকে, শূন্য থেকে নয়। আঁকার সুবিধার জন্যই ০ থেকে ২০ পর্য্যন্ত স্কেল বাদ দেওয়া হয়েছে। এই চিত্রকে বলা হয় "হিষ্টোগ্রাম", "ব্লক্‌চিত্র" বা "সোপান চিত্র" (staircase chart)। শ্রেণীর উচ্চ ও নীম্ন সীমা নির্দ্দেশ করার জন্য সংস্থাপিত বিন্দুগুলিকে সংযোগ করা হয় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অনুভূমিক (horizontal) রেখা টেনে। এইভাবে যে আয়তক্ষেত্রের উদ্ভব হ'ল সেই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হ'ল সেই শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যার প্রতীক। সুতরাং সবগুলি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হ'ল মোট উদাহরণ-সংখ্যা ২০০-র প্রতীক। চিত্রটীর দিকে দৃষ্টি দিলে সহজেই নজরে আসে কি ধরণের মজুরী কত মজুরে পায়।

শ্রেণী-অন্তর না ধরে শ্রেণী-অন্তরের মধ্য-বিন্দু ধরেও চিত্র আঁকা যায়। মধ্য-বিন্দুকে ভুজ ও উদাহরণ-সংখ্যাকে কোটী ধরে বিন্দু-স্থাপন করে বিন্দুগুলিকে ভঙ্গুর রেখার সাহায্যে যোগ করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে বলা হয় "বহুভুজ চিত্র" বা ফ্রিকোয়েন্সী পলিগন। ফ্রিকোয়েন্সী পলিগণের (বহুভুজ চিত্র) সাহায্যে তুলনার সুবিধা হয়। দুই বা ততোধিক বহুভুজ ক্ষেত্র একই চিত্রে দেখান চলে, কেন না, একটা পলিগণ আর একটী পলিগণকে অতিক্রম করতে পারে, কখনও সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় না। সাধারণ লোকের পক্ষে এধরণের চিত্র সহজেই বুঝে নেওয়া সম্ভব।

শ্রেণী-অন্তর সমান হওয়াই উচিত এবং সাধারণতঃ হয়ও তাই। কিন্তু কার্য্যক্ষেত্রে কখন কখন ডেটাগুলিকে যখন টেব্‌লে সাজান হয় তখন শ্রেণী-অন্তর সব শ্রেণীর এক থাকে না, পৃথক থাকে ; কারণ, হয়ত একটা শ্রেণীর উপর জোর দেওয়া প্রয়োজন হয়, নয় ত ছাপাই খরচা বাঁচানর উদ্দেশ্যেই এরকম করা হয়। নীচের টেব্‌লে (টেবল্ নং ২৬) একটা উদাহরণ দিয়েছি।

এই টেব্‌লকে চিত্রে প্রকাশ করতে হ'লে যে-সব আয়তক্ষেত্র আঁকা হবে তাদের বিস্তার থাকবে বিভিন্ন, কেননা, শ্রেণী-অন্তর হচ্ছে বিভিন্ন। শ্রেণী-অন্তর যখন সব শ্রেণীরই এক, তখন সব আয়তক্ষেত্রের ভূমির বিস্তারও এক, এবং তাই দৈর্ঘ্যর অনুপাতেই হয় ক্ষেত্রফল ; বিন্দু-সংস্থাপনের সময় (প্লটিং) তাই শুধু দৈর্ঘ্যের প্রতি নজর রাখলেই চলে। কিন্তু

শ্রেণী-অন্তর যদি বিভিন্ন থাকে তাহ'লে চিত্র অঙ্কনের সময় শুধু দৈর্ঘ্য দেখলেই চলেনা, দেখতে হয় যে, যেন আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল আনুপাতিক হয়।

টেবল্—নং ২৬

বেকার সংখ্যা

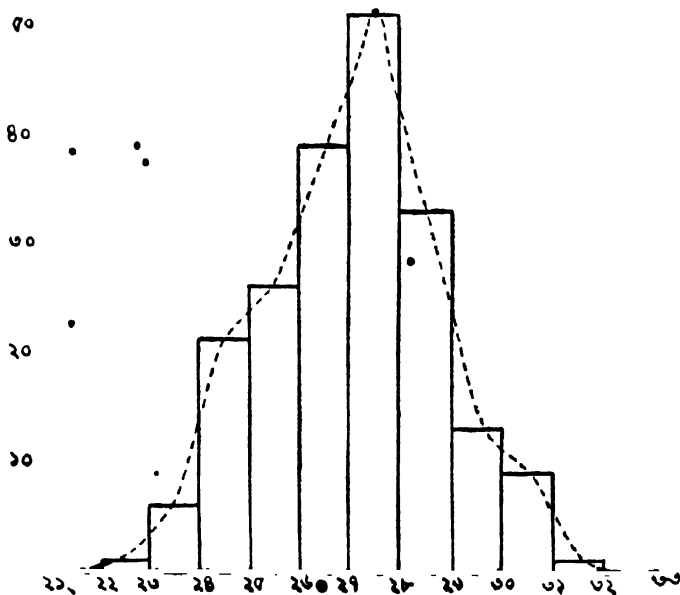
বয়স		বেকার সংখ্যা
১৬ থেকে ১৮	....	২৫,০০০
১৮ „ ২০	...	৩৯,০০০
২০ „ ২৫	...	৬,০০,০০০
২৫ „ ৩৫	...	৮,৮৭,০০০
৩৫ „ ৪৫	...	২,৩১,০০০
৪৫ „ ৫০	....	৪৮,০০০
৫০ „ ৭০	...	৪৯,০০০

স্মুথিং (মসৃণ-করণ) ঃ

৪ নং চিত্রে ২০০ জন মজুরের আয় হিস্টোগ্রাম চিত্রের সাহায্যে দেখান হয়েছে। সেই ২০০ জন মজুর সম্পর্কে টেবল্ ৯ ও ১০ অবলম্বন করে আরও দুটী চিত্র আঁকা চলে। দেখা যাবে যে শ্রেণী-অন্তর সঙ্কীর্ণ যত করা যাচ্ছে, বহুভুজ চিত্রটীও (পলিগন) ততই মসৃণ (স্মুথ) ও নিয়মিত (রেগুলার) হয়ে আস্‌ছে। শ্রেণী-অন্তরকে অধিকতর সঙ্কীর্ণ করে আন্‌লে এই নিয়মানুবর্ত্তিতা আর লক্ষ্য করা যাবে না।

চিত্রে (নং ৫) একটী সাধারণ নিয়ম লক্ষ্য করছি যে, নীচের দিক্ থেকে ধর্‌লে বিভিন্ন আয়-শ্রেণীর মজুর-সংখ্যা ক্রমশঃ বেড়েই যাচ্ছে যতক্ষণ পর্য্যন্ত না ২৭৷৷০ শ্রেণীতে এসে পৌঁছন যাচ্ছে এবং তারপর আবার প্রত্যেক শ্রেণীর মজুর-সংখ্যা ক্রমশঃ কমে আস্‌ছে ৩২৲ আয় পর্য্যন্ত। ২০০ জন মজুরের সকলেই একই ধরণের কাজ করে; আর, তাদের আয়ও নিশ্চয়ই নির্ভর করে কার্য্যকুশলতার উপর; সুতরাং হ্রাস-বৃদ্ধি নিয়মিত হবে বলেই আশা করা যায়। মাত্র ১ সপ্তাহের উপার্জ্জনের হিসাব না নিয়ে যদি ৫২ সপ্তাহের আয়ের হিসাব নিতুম এবং তা'থেকে সাপ্তাহিক গড় আয় হিসাব করতুম, তা'হলে অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র শ্রেণী-অন্তর-বিশিষ্ট শ্রেণীর মধ্যে অধিকতর নিয়মানুগতা (regularity) দেখতুম; অথবা, যদি

১০,৪০০ জন মজুরের (৫২ × ২০০) আয়ের হিসাব নিতুম তা'হলেও এই ফলই পেতুম ! অতএব, যদি মসৃণতা (স্মুথনেস্) ও নিয়মানুগতা (রেগুলারিটী) দেখতে চাই, তাহ'লে যে, শ্রেণী-অন্তর সঙ্কীর্ণ করে নিয়ে আসতে হবে শুধু তাই-ই নয়, উদাহরণ-সংখ্যাও অধিকতর নিতে হবে যাতে ব্যতিক্রম যদি কিছু থাকে তা' এড়িয়ে যাওয়া যায়। সঙ্কীর্ণতর শ্রেণী-অন্তর ধরে হিস্টোগ্রাম আঁকলে দেখা যায় যে সোপান-শ্রেণীর আয়তনও ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হয়ে আসে এবং একটা মসৃণ বক্ররেখায় (স্মুথ কার্ভে) পরিণত হওয়ার সম্ভাবনা দেখা যায় (চিত্র নং ৫)।

চিত্র নং ৫

ফ্রিকোয়েন্সী পলিগন বা "বহুভুজ" চিত্র

কোন হিস্টোগ্রামকে মসৃণ (স্মুথ্) করার অর্থ হ'ল চিত্রের উপর দিয়ে কোণাগুলো মেরে দিয়ে এমন একটা সুনিয়ন্ত্রিত বক্ররেখা (কার্ভ) টানা যে, যেন—

(ক) স্মুথ্ড্-রেখার অন্তঃস্থ ক্ষেত্রফল হিস্টোগ্রামটীর ক্ষেত্রফলের সম্পূর্ণ সমান হয় এবং

(২) স্মুথ্‌ড্‌-কার্ভের প্রত্যেক অংশের ক্ষেত্রফল অনুরূপ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

লক্ষ্য করতে হবে যে, স্মুথ্‌ড্‌ কার্ভের শীর্ষবিন্দু হিস্টোগ্রামের শীর্ষবিন্দুকে ছাড়িয়ে উপরেই থাকে। নিয়মানুবর্তী অগণিত উদাহরণের "যথেচ্ছ নমুনা" রূপেই (র‍্যাণ্ডাম স্যাম্প্‌ল্‌) ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্‌কে গণ্য করা হয়; টেব্‌লে স্বল্প-সংখ্যক উদাহরণ নেওয়া হয় বলেই যা-কিছু ব্যতিক্রম লক্ষ্য করা যায়। কোন ঘটনার মধ্যে যে ঐক্য ও নিয়মানুগতা আছে তা পরিস্ফুট হয়ে ওঠে "স্মুথিং" করার ফলে। তাই, সংগৃহীত তথ্য থেকে সমগ্রের ঝোঁক কোন্‌ দিকে জানতে হ'লে স্মুথিং প্রয়োজন। তথ্যগুলিকে আবার দুই শ্রেণীতে ভাগ করা যায়—অবিচ্ছিন্ন শ্রেণী ও স্বতন্ত্র শ্রেণী (Continuous Series & Discrete Series)। অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীতে, স্বাধীন বিষম-রাশির (ভ্যারিয়েব্‌লস্‌) মানের হ্রাস-বৃদ্ধি হয় অতি ক্ষুদ্র পরিমাণে; আর, স্বতন্ত্র-শ্রেণীতে স্বাধীন বিষম-রাশির মানের হ্রাস-বৃদ্ধি হয় নির্দ্দিষ্ট পরিমাণে। সুতরাং অবিচ্ছিন্ন-শ্রেণীর কার্ভের গতি যেমন সহজ ও সরল, স্বতন্ত্র-শ্রেণীর কার্ভের গতি তা' নয় —লাফিয়ে লাফিয়ে বাড়ে-কমে। উচ্চতা মাপার জন্য ১০০০ লোককে যদি দৈর্ঘ্য হিসাবে দাঁড় করান যায়, তাহ'লে পর পর লোকগুলির উচ্চতার মধ্যে তারতম্য খুব সামান্য লক্ষ্য করা যাবে, কেন না, পর পর দুজনের উচ্চতার তফাৎ থাকবে অতি সামান্য। উচ্চতা হ'ল অবিচ্ছিন্ন রাশি (Continuous variable); কিন্তু, যদি মজুরের মজুরী ধরি, তাহ'লে সেটা হবে স্বতন্ত্র-রাশি, কেন না হিসাবটা টাকায় হবে বলে আনার নীচে নামবে না; সুতরাং, আয়ের শ্রেণী-বিভাগে ফাঁক থেকে যাবে অনেকখানি। সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণী-বিষয়ক কার্ভকে স্মুথ করা যায়; কিন্তু স্বতন্ত্র শ্রেণী-সম্পর্কিত কার্ভে তা করা ঠিক হয় না। তবে, সাধারণতঃ, সংখ্যা-বিজ্ঞান-বিষয়ক আলোচনায় উচিত না হ'লেও, করা হ'য়ে থাকে।

অগিভ্‌:

কোন কোন ক্ষেত্রে তথ্যগুলিকে ফ্রিকোয়েন্সী টেব্‌লে না সাজিয়ে ক্রম-বর্দ্ধিষ্ণু টেব্‌লে (কিউমুলেটিভ্‌ টেবল্‌) সাজান প্রয়োজন হয়। নীচের টেবল্‌ ক'টীর দিকে দৃষ্টি দিলে সুবিধাঃকি অনেকটা বোঝা যাবে।

টেবল্ নং ২৭

(২২,২৬২ সংখ্যক) টেলিগ্রাফ খুঁটীর আয়ু

আয়ু (বৎসর)	খুঁটীর সংখ্যা
০— ১	৫১
১— ২	১২২
২— ৩	৬৯২
৩— ৪	৯৬৬
৪— ৫	৩,৩৬৩
৫— ৬	১,১২৮
৬— ৭	১,১০৯
৭— ৮	১,৬২৯
৮— ৯	১,০৯০
৯—১০	১,৯৭৮
১০—১১	১,৪৬৭
১১—১২	১,৫৪৫
১২—১৩	১,৩৭৭
১৩—১৪	৭৪৬
১৪—১৫	৫৩৪
১৫—১৬	৯৫৬
১৬—১৭	৯১৮
১৭—১৮	৫৯১

এই টেবলে দেখ্‌ছি যে প্রথম বছরেই ৫১টা খুঁটী বাতিল কর্‌তে হয়েছিল ; আর, ১ বছর কাজ দিয়েছিল কিন্তু দু'বছর পূরণ হবার পূর্ব্বেই বাদ

টেবল্ নং ১৮

আয়ু	খুঁটীর সংখ্যা
১ বৎসরের কম	৫১
১ ,, ,,	১৭৩
৩ ,, ,,	৮৬৫
৪ ,, ,,	১,৮৩১
৫ ,, ,,	৫,১৯৪
৬ ,, ,,	৬,৩২২
৭ ,, ,,	৭,৪৩১
৮ ,, ,,	৯,০৬০
৯ ,, ,,	১১,১৫০
১০ ,, ,,	১৩,১২৮
১১ ,, ,,	১৫,৫৯৫
১২ ,, ,,	১৭,১৪০
১৩ ,, ,,	১৮,৫১৭
১৪ ,, ,,	১৯,২৬৩
১৫ ,, ,,	১৯,৭৯৭
১৬ ,, ,,	২০,৭৫৩
১৭ ,, ,,	২১,৬৭১
১৮ ,, ,,	২২,২৬২

দিতে হয়েছিল ১২২টা খুঁটী, ইত্যাদি। তথ্যগুলি এখানে সাজান হয়েছে ফ্রিকোয়েন্সী টেব্‌লে। এই তথ্যগুলিকে যদি ক্রমশঃ যোগ করে টেবল্ তৈরী করা যায় তাহ'লে টেবল্ নং ২৮এর মত ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু টেবল্ পাব।

একটা শ্রেণীকে ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু টেবলে ২ রকমভাবে সাজান যায়। যেভাবে উপরের টেব্‌লে (টেঃ নং ২৮) সাজান হয়েছে ঠিক তার বিপরীতভাবেও সাজান চলে (টেঃ নং ২৯)। ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু (কিউমুলেটিভ্) টেবল্ থেকেও

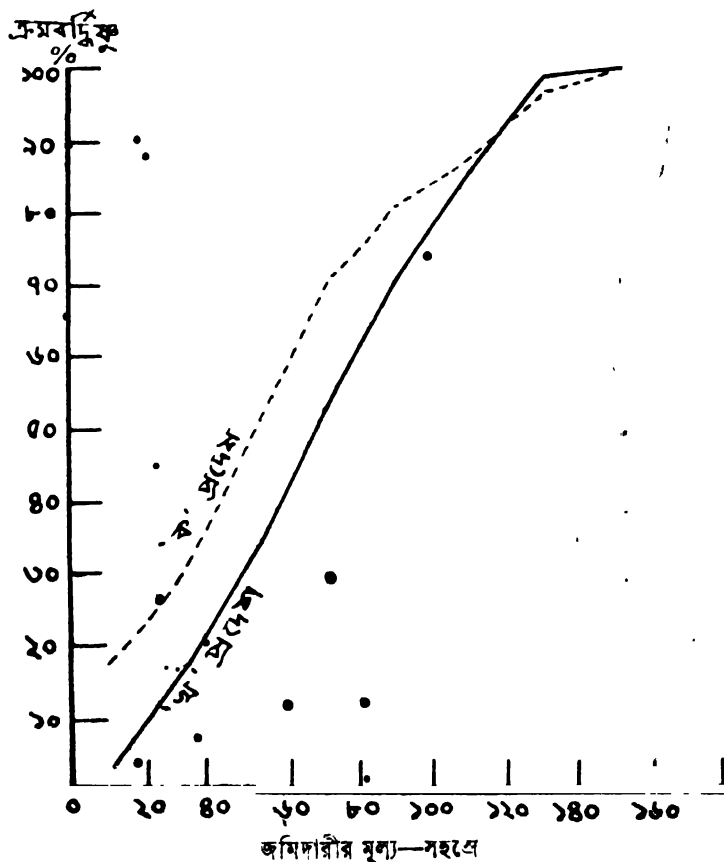
টেবল্ নং ২৯

আয়্	খুঁটীর সংখ্যা
০ ও তার অধিক	২২,২৮২
১ ,, ,, ,,	২২,২১১
২ ,, ,, ,,	২২,০৮৯
৩ ,, ,, ,,	২১,৩৯৭
৪ ,, ,, ,,	২০,৪৬২
৫ ,, ,, ,,	১৭,০৬৮
৬ ,, ,, ,,	১৫,৭৪০
৭ ,, ,, ,,	১৪,৮৩২
৮ ,, ,, ,,	১৩,২০২
৯ ,, ,, ,,	১১,১১২
১০ ,, ,, ,,	৯,১৩৪
১১ ,, ,, ,,	৬,৬৬৭
১২ ,, ,, ,,	৫,১১২
১৩ ,, ,, ,,	৩,৭৪৫
১৪ ,, ,, ,,	২,৯৯৯
১৫ ,, ,, ,,	২,৪৬৫
১৬ ,, ,, ,,	১,৫০৯
১৭ ,, ,, ,,	৫৯১
১৮ ,, ,, ,,	০

আমরা "বহুভুজ" চিত্র বা পলিগন্ কার্ভ আঁকতে পারি। ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ অবলম্বন করে যে হিস্টোগ্রাম আঁকা হয় তাতে লক্ষ্য রাখতে হয় আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের উপর · অর্থাৎ. নির্ভর করতে হয় ক্ষেত্রফল স্কেলের ('এরিয়া' স্কেলের) উপর। কিন্তু, কিউমুলেটিভ্ টেবল্ অবলম্বন করে যখন চিত্র আঁকা হয়, তখন নজর রাখ্‌তে হয় রৈখিক স্কেলের (লিনিয়ার স্কেলের) উপর। কিউমুলেটিভ্ টেবল্ অবলম্বন করে যে চিত্র

আঁকা হয়, তাকে বলা হয় 'অগিভ্'। অগিভের গতি ক্রিকোয়েন্সী পলিগনের চেয়ে সরল ও নিয়মিত এবং শ্রেণী-অন্তরের তারতম্যে বিশেষ কোন পরিবর্ত্তন দেখা যায় না। অগিভ্ চিত্রে যা-কিছু কোণা বা খোঁচা থাকে তাও সহজেই মেরে দেওয়া যায় (সুখ করা যায়)।

বিভিন্ন ক্রিকোয়েন্সী কার্ভের তুলনা সম্ভব নয় যদি নাকি উভয় সমষ্টির শ্রেণী-অন্তর ও শ্রেণী-বিভাগ এক না হয়। কিন্তু অগিভের সে-রকম কোন অসুবিধা নেই; অধিকন্তু শ্রেণী-অন্তর যদি বিভিন্নও হয়, তাহ'লেও অগিভের রূপ কিছু বদলায় না। অগিভ্ থেকে নতুন তথ্যও সহজেই সংকলন করা যায়। যেমন, যদি জানতে চাই যে ৯২ বছরের

চিত্র নং ৬
অগিভ্ চিত্র

পূর্ব্বেই কতগুলি খুঁটী বাতিল করে দেওয়া প্রয়োজন হ'তে পারে, তাহ'লে, অগিভ্-কার্ভের ৯২ ভুজের কোটী দেখলেই বলে দেওয়া যায় যে ১১০০০ খুঁটী বাতিল করে দেওয়া দরকার হবে। আবার, ঐ চিত্র থেকে এও বলা যায় যে একটা নির্দ্দিষ্ট সময়ের মধ্যে (যেমন, ধর ৯২ বৎসর থেকে ১২ বৎসরের ভেতর) কত খুঁটী বাতিল হতে পারে। ১২ বছরের ভেতর কত খুঁটী বাতিল হবে টেবল্ থেকেই বলতে পারি; আর ৯২ বছরের ভেতর কত বাতিল হবে, তাও উপরে বর্ণিত উপায়ে বার করা যায় (১২০০০ সংখ্যা)। সুতরাং ১৭,১৪০ থেকে ১২০০০ বাদ দিলেই পাব ৯২ বৎসর থেকে ১২ বৎসরের মধ্যে কতগুলি খুঁটী বাতিল করা প্রয়োজন হতে পারে। এটা মনে রাখতে হবে যে, ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ তৈরী না করেও সোজাসুজি সারিবন্দী তথ্য থেকেই অগিভ্ আঁকা যায়।

অগিভ্ ও ফ্রিকোয়েন্সী কার্ভ একই তথ্যের বিভিন্ন বিন্যাস। দুয়েরই সুবিধা-অসুবিধা আছে। সাধারণ ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ই হোক আর কিউমুলেটীভ্ টেবল্ই হোক এদের অবলম্বন করে একই চিত্রে দুই বা ততোধিক কার্ভ আঁকা যায় তুলনামূলক আলোচনার জন্য। তুলনাকে অধিকতর কার্য্যকরী করার জন্য শতকরা হিসাব নেওয়াই যুক্তিসঙ্গত। নীচের টেবল্ (নং ৩০) ও চিত্রে (নং ৬) ইহা দেখান হয়েছে।

টেবল্ নং ৩০

জমিদারীর মূল্য (০০০)	(০)	"ক" প্রদেশ জমিদারী সংখ্যা	%	ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু %	"খ" প্রদেশ জমিদারী সংখ্যা	%	ক্রমবর্দ্ধিষ্ণু %
০ হইতে	২০	৩৫	১৭·৮	১৭·৮	১৪	৩·৫	৩·৫
২০	৪০	২৩	১১·৭	২৯·৫	৫৪	১৩·৭	১৭·২
৪০	৬০	৪০	২০·৩	৪৯·৮	৬৬	১৬·৮	৩৪·০
৬০	৮০	৪০	২০·৩	৭০·১	৭৪	১৮·৮	৫২·৮
৮০	১০০	২২	১১·২	৮১·৩	৭২	১৮·৩	৭১·১
১০০	১২০	১৪	৭·১	৮৮·৪	৬০	১৫·২	৮৬·৩
১২০	১৪০	১৭	৮·৬	৯৭·০	৪৮	১২·২	৯৮·৫
১৪০	১৬০	৬	৩·০	১০০·০	৬	১·৫	১০০·০
মোট —		১৯৭	১০০		৩৯৪	১০০	

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ব্যতিক্রম (ডিস্‌পার্সান্) :

তুলনামূলক আলোচনার জন্য গড়, মধ্যমা বা মোড প্রয়োজন, আমরা পূর্ব্বেই দেখেছি; কিন্তু, কার্য্যক্ষেত্রে দেখা যায় যে শুধু গড় বা মধ্যমা জানলেই সম্যক তুলনা করা যায় না। একটা সমষ্টির মধ্যে বিভিন্নতা কতখানি বর্তমান তা জানাও আমাদের দরকার। গড় থেকে তার কোন হদিশ পাওয়া যায় না। যদি বলি যে বাঙ্গালী শিক্ষকের গড়ে আয় ৪০৲ টাকা, তাহ'লে একথা বোঝা যায় না যে, এই গড় হ'ল সেই সব বাঙ্গালীর যাদের আয় ৩৫৲ টাকা থেকে ৪৫৲ টাকার ভিতর, না, যাদের আয় ২০৲ টাকা থেকে ৬০৲ টাকার ভিতর। সমগ্র সমষ্টির মধ্যে আয় কি ভাবে ব্যপ্ত না জান্‌লে তুলনা করা খুব সঠিক হবে না। যদি বলি লোকটা ৫ ফিট ৮ ইঞ্চি লম্বা, তাহ'লে সাধারণের মনে লোকটা সম্বন্ধে একটা অস্পষ্ট ধারণা হবে; কিন্তু যদি তার সঙ্গে বলি লোকটার ছাতির বেড় ৩৮ ইঞ্চি ও কোমরের ঘের ৩০ ইঞ্চি তা হ'লে লোকটা সম্বন্ধে অপেক্ষাকৃত স্পষ্ট একটা ধারণা করা যায়। তেমনি, সংখ্যা-বিজ্ঞানেও কোন বিষয়ে সার্থক তুলনা করতে গেলে গড় ছাড়া আরও অনেক বিষয় জানা প্রয়োজন। ডিস্‌পার্সান্ বা ব্যতিক্রম তাদের মধ্যে একটী। ডিস্‌পার্সান বল্‌লে এই বোঝায় যে কোন নির্দ্দিষ্ট সমষ্টির অন্তর্ভুক্ত উদাহরণগুলির পরিমাপের মধ্যে বিভিন্নতা বর্তমান। ধরা যাক্, বাঙ্গালী সৈনিকদের একটা দল গঠন করা হচ্ছে; দেখা গেল যে এই সৈনিকদের প্রত্যেকেই ৬৬ ইঞ্চি থেকে ৬৮ ইঞ্চির ভিতর মাথায় লম্বা। দেখা যাচ্ছে যে উচ্চতার ভেদটা ২ ইঞ্চির মধ্যেই সীমাবদ্ধ অর্থাৎ ভেদ সামান্য। সংখ্যা-বিজ্ঞানের ভাষায় বল্‌ব ডিস্‌পার্সান সামান্যা কিন্তু যদি দেখি যে সৈনিকদের মধ্যে সব চেয়ে বেঁটে লোকটি মাথায় ৬২ ইঞ্চি মাত্র আর সবচেয়ে লম্বা লোকটী লম্বায় ৭২ ইঞ্চি, তাহ'লে বল্‌ব যে এদের মধ্যে উচ্চতার ভেদ প্রচণ্ড—১০ ইঞ্চির সমান। সংখ্যা-বিজ্ঞানের ভাষায় বল্‌ব ডিস্‌পার্সান প্রচণ্ড।

ডিস্পার্সান্ নির্ণয়ের চারটী উপায় আছে—

(১) ব্যাপ্তি (রেন্জ্)
(২) গড় ব্যতিক্রম (মিন্ ডেভিয়েশন)
(৩) ষ্টাণ্ডাড ব্যতিক্রম (ষ্টাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন)
(৪) কোয়ার্টাইল ব্যতিক্রম (কোয়ার্টাইল ডেভিয়েশন)

রেন্জ্ :

কোন সমষ্টির সর্ব্বোচ্চ শ্রেণী ও সর্ব্বনীম্ন শ্রেণীর মধ্যে যে পার্থক্য তাই হল রেন্জ্ বা "ব্যাপ্তি"। টেবল্ নং ৭-এ দেখছি যে সর্ব্বনীম্ন শ্রেণী হচ্ছে ২২৸৵০ আর সর্ব্বাধিক হচ্ছে ৩১৲ টাকা ; সুতরাং, রেন্জ্ (ব্যাপ্তি) হচ্ছে ৩১৲ – ২২৸৵০ = ৮৵০। রেন্জ্ ব্যবহারের অসুবিধা আছে। সব ক্ষেত্রেই যে টেবল্ থেকে সর্ব্বনীম্ন ও সর্ব্বোচ্চ প্রান্ত দুটী পাওয়া যাবে তার কোন মানে নেই। দ্বিতীয়তঃ, রেন্জ্ নিভর করে কেবলমাত্র দুটী প্রান্তের উপর ; সুতরাং, কোন প্রান্তের শ্রেণী যদি ঠিক তার নিকটবর্ত্তী শ্রেণী থেকে বেশ্ কিছুটা বিভিন্ন হয়, তাহ'লে রেন্জের মাত্রাই ব্যহত হবে। পূর্ব্বের উদাহরণে শেষ শ্রেণীটা না ধরে তার পূর্ব্ববর্ত্তী শ্রেণীকে নিলে রেন্জ্ দাঁড়াত ৭৸৵০। এখানে শেষ দুটী শ্রেণীর মধ্যে তফাৎ বেশী বলেই (৩১৲ – ৩০৸০) রেন্জ ও ব্যহত হচ্ছে। সুতরাং, ডিস্পার্সান্ পরিমাপ করবার জন্য রেন্জ্ উপযোগী নয়।

গড় ব্যতিক্রম (Mean Deviation) :

কোন সমষ্টির প্রতীকের সঙ্গে শ্রেণীর অন্তরকে ব'লে 'ব্যতিক্রম' (ডেভিয়েশন)। গড়, মধ্যমা বা মোড্ থেকে ব্যতিক্রম মাপা হয়। "গড়'কে যদি সমষ্টির প্রতীক বলে ধরি, তাহ'লে গড়ের সঙ্গে প্রত্যেক শ্রেণীর যা তফাৎ সেটাই হবে ব্যতিক্রম। ব্যতিক্রম-গুলির কতকগুলি হবে যুক্ত-চিহ্ন-সম্বলিত আর কতকগুলি হবে বিযুক্ত-চিহ্ন-সম্বলিত ; এবং, সব ব্যতিক্রমের যোগফল হবে শূন্য। কিন্তু, মধ্যমা (মিডিয়ান্) থেকে যদি ব্যতিক্রম মাপা হয়, তাহ'লে ব্যতিক্রমগুলির কোনটা পজিটিভ্ আবার কোনটা নেগেটিভ হ'লেও যোগফল 'শূন্য' নাও হ'তে পারে। একটা সমষ্টির মধ্যে বিভিন্নতা কি রকম নিরূপণ করতে হলে গড় ব্যতিক্রম

নেওয়া হয়। বিভিন্ন ব্যতিক্রমগুলিকে যোগ করে (যোগ-বিয়োগ চিহ্নগুলি গণণার মধ্যে না এনে) গড় নির্দ্ধারণ করলেই পাওয়া যায় গড় ব্যতিক্রম। গড় ব্যতিক্রম সাধারণতঃ নির্দ্ধারণ করা হয় মধ্যমা থেকে ; গড় থেকেও কখন কখন 'গড় ব্যতিক্রম' হিসাব করা হয়। তবে, মোড্ থেকে হিসাবকরার বাধা না থাকলেও তা করা হয় না। নীচের টেবলে "গড়" ও "মধ্যমা" থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করে দেখান হয়েছে—

টেবল্ নং ৩১

শিক্ষকের আয় (টাকা)	গড় থেকে ব্যতিক্রম	মধ্যমা থেকে ব্যতিক্রম
৩৫৲	−৩	−৩॥০
৩৬৲	−২	−২॥০
৩৭৲	−১	−১॥০
৩৮৲	০	− ॥০
৩৮॥০	+ ॥০	০
৩৯৲	+১	+॥০
৩৯॥০	+১॥০	+১৲
৪০৲	+২	+১॥০
৪০৲	+২	+১॥০
৩৪৩	১৩	১২॥০

গড় $= \frac{৩৪৩}{৯}$	$\delta = \frac{১৩}{৯}$	$\delta M = \frac{১২॥০}{৯}$
$= ৩৮\cdot১$	$= ১\cdot৪$	$= ১\cdot৩৮$

গণিতের ভাষায় বলা যায় যে—

যদি d = ব্যতিক্রম

N = শ্রেণী-সংখ্যা

এবং δ (উচ্চারণ, ডেল্টা) = গড় ব্যতিক্রম বা গড় ডেভিয়েশন্, হয়,

তাহ'লে $$\delta = \frac{\Sigma d}{N}$$

এবার দেখা যাক্ ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ অবলম্বন করে গড় ব্যতিক্রম কিভাবে নির্ণয় করা যায়। পূর্ব্বে যেমন বলেছি এখানেও তেমনি আমরা প্রত্যেক

শ্রেণীর মধ্যে উদাহরণগুলি সমানভাবে পরিব্যাপ্ত হয়ে আছে বলে ধরব। প্রকৃত মধ্যমা থেকে ব্যতিক্রমগুলি সোজাসুজিভাবে হিসাব করা গেলেও, যে-শ্রেণীর মধ্যে প্রকৃত মধ্যমা পড়বে সেই শ্রেণীর মধ্য-বিন্দু থেকে ব্যতিক্রমগুলি হিসাব করা হবে।

টেবল্ নং ৩২

দৈনিক মজুরীর হিসাব

দৈনিক মজুরী (আনা)	মধ্য-বিন্দু (m)	উদাহরণ-সংখ্যা (f)	কল্পিত মধ্যমা থেকে ব্যতিক্রম (d′)	f×d′
১	২	৩	৪	৫
২৫'০ থেকে ২৯'৯	২৭'৫	২১	-১০	— ৪১০
৩০'০ " ৩৪'৯	৩২'৫	২৭৪	—১৫	—৪১১০
৩৫'০ " ৩৯'৯	৩৭'৫	৫০০	—১০	—৫০০০
৪০'০ " ৪৪'৯	৪২'৫	৪০২	— ৫	—২০১০
৪৫'০ " ৪৯'৯	৪৭'৫	২৫০	০	০
৫০'০ " ৫৪'৯	৫২'৫	৩৫৭	+ ৫	+১৭৮৫
৫৫'০ " ৫৯'৯	৫৭'৫	৩৯৭	+১০	+৩৯৭০
৬০'০ " ৬৪'৯	৬২'৫	১৫১	+১৫	+২২৬০
৬৫'০ " ৬৯'৯	৬৭'৫	৯৫	+২০	+১৯০০
৭০'০ " ৭৪'৯	৭২'৫	৫১	+২৫	+১২৭৫
৭৫'০ " ৭৯'৯	৭৭'৫	১৭	+৩০	+ ৫১০
		২,৫১৬		১৩২৬০

এই টেবল্ থেকে পাচ্ছি যে, ২৫১৬ জন মজুরের দৈনিক মধ্যমা-মজুরী (মিডিয়ান্ মজুরী) হচ্ছে ৪৬'২২ আনা। এই মধ্যমা থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করা গেলেও সুবিধার জন্য যে-শ্রেণীতে মধ্যমা পড়া সম্ভব সেই শ্রেণীর মধ্য-বিন্দু থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করা হয়েছে। এই টেবলে ৪৬'২২ থেকে ব্যতিক্রম হিসাব না করে, করা হয়েছে ৪৭'৫ থেকে। দ্বিতীয় স্তম্ভে দেখান হয়েছে শ্রেণীগুলির মধ্য-বিন্দু, আর, চতুর্থ স্তম্ভে কল্পিত মধ্যমা (৪৭'৫) থেকে ব্যতিক্রম। পঞ্চম স্তম্ভে দেওয়া হয়েছে (৩) ও (৪) স্তম্ভের গুণফল। মোট ব্যতিক্রম নির্ণয় করতে (৪) স্তম্ভের

যোগফল না নিয়ে নিতে হবে (৫) স্তম্ভের যোগফল এইভাবে মোট ব্যতিক্রম দাঁড়াল ২৩,২৬০।

মধ্যমা যে-শ্রেণীতে আছে তার নীচের শ্রেণী-সংখ্যা চার এবং সেই চার-শ্রেণীর মোট উদাহরণ-সংখ্যা ১৪৪৭। এই ১৪৪৭টী উদাহরণের ব্যতিক্রম এখানে যা ধরা হয়েছে তা হচ্ছে প্রকৃত মধ্যমা থেকে ব্যতিক্রমের চেয়ে কম।

প্রকৃত মধ্যমা হ'ল কল্পিত মধ্যমার চেয়ে (৪৭'৫ – ৪৬'২২) = ১'২৮ কম। সুতরাং ১৪৪৭ উদাহরণে প্রত্যেকটীর জন্য ১'২৮ ব্যতিক্রম বেশী ধরা হয়েছে, অর্থাৎ, এই উদাহরণগুলির জন্য মোট (১৪৪৭ × ১'২৮) = ১৮৫২'১৬ বেশী ধরা হয়েছে। আবার, মধ্যমার উপর দিকে আছে ৬টী শ্রেণী যাদের উদাহরণ-সংখ্যা হ'ল মোট ১০৬৯। কল্পিত মধ্যমা, প্রকৃত মধ্যমার চেয়ে ১'২৮ বেশী বলে ১০৬৯টীর জন্য যা ব্যতিক্রম ধরা হয়েছে তার প্রত্যেকটী উদাহরণে ব্যতিক্রম ধরা হয়েছে ১'২৮ কম, অর্থাৎ, ১০৬৯ উদাহরণের জন্য মোট (১০৬৯ × ১'২৮) = ১৩৬৮'৩২ কম ধরা হয়েছে। সুতরাং, মোট ব্যতিক্রম ২৩,২৬০-র সঙ্গে, –(১৪৪৭ × ১'২৮) এবং +(১০৬৯ × ১'২৮) [অর্থাৎ –১৮৫২'১৬ + ১৩৬৮'৩২ = –৪৮৩'৮৪] যোগ করলে প্রকৃত ব্যতিক্রম পাব।

যে শ্রেণীতে মধ্যমা পড়েছে তার ২৫০টী উদাহরণের ব্যতিক্রম কত এখনও ধরা হয় নি। এবার এই উদাহরণ-সংখ্যার ব্যতিক্রম হিসাব করে দেখা যাক। এই শ্রেণী X-অক্ষরেখার উপর ৪৫'০ হ'তে ৫০'০ পর্য্যন্ত বিস্তৃত। ২৫০টী উদাহরণ ৪৫'০ থেকে ৫০'০ পর্য্যন্ত ছড়িয়ে আছে ধরলে ৪৫'০ থেকে ৪৬'২২ পর্য্যন্ত কতগুলি উদাহরণ আছে তা হিসাব করে বলা যায়। ৪৬'২২ হ'ল প্রকৃত মধ্যমা।

$$\frac{১'২২}{৫'০} \times ২৫০ = ৬১'০$$

তেমনি, ৪৬'২২ থেকে ৫০'০র মধ্যে ছড়িয়ে আছে

$$\frac{৩'৭৮}{৫'০} \times ২৫০ :: ১৮৯'০ \text{ উদাহরণ}$$

৬১টী উদাহরণের গড় ব্যতিক্রম হ'ল $\frac{১'২২}{২}$

অর্থাৎ মোট ব্যতিক্রম—৬১ × '৬১ = ৩৭'২১

তেম্‌নি, ১৮৯ উদাহরণের গড় ব্যতিক্রম হ'ল $\frac{৩'৭৮}{২}$

অর্থাৎ, মোট ব্যতিক্রম হ'ল—১৮৯ × ১'৮৯ = ৩৫৭'২১

সুতরাং, যে শ্রেণীতে মধ্যমা আছে সেই শ্রেণীর উদাহরণগুলির মোট ব্যতিক্রম হ'ল ৩৭'২১ + ৩৫৭'২১ = ৩৯৪'৪২। অতএব, প্রকৃত মধ্যমা থেকে মোট ব্যতিক্রম দাঁড়ায়—

২৩,২৬০ − ৪৮৩'৮৪ + ৩৯৪'৪২ = ২৩,১৭০'৫৮

সুতরাং—

$$\text{গড় ব্যতিক্রম} = \frac{২৩১৭০'৫৮}{২৫১৬} = ৯'২০$$

এই প্রক্রিয়াটীকে গণিতের সাহায্যেও ব্যক্ত করা যায়—

যদি—

Na = যে শ্রেণীতে মধ্যমা আছে তার উপরের শ্রেণীগুলির মোট উদাহরণ-সংখ্যা

Nb = ঐ ঐ " তার নীচের ঐ ঐ

c = প্রকৃত মধ্যমা—কল্পিত মধ্যমা

N_m = যে শ্রেণীতে মধ্যমা আছে সেই শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা

i = শ্রেণী-অন্তর

d = ব্যতিক্রম

N = উদাহরণ-সংখ্যা হয়,

তাহ'লে—

$$\text{গড় ব্যতিক্রম} = \frac{\Sigma d}{N}$$

এবং

$$\Sigma d = \Sigma d'f + (N_b - N_a)c + N_m \frac{\left(\frac{i}{2} + c\right)^2}{2i} + N_m \frac{\left(\frac{i}{2} - c\right)^2}{2i}$$

উপরে যে উদাহরণ নিয়েছি তাতে $\Sigma d'f$ = ২৩,২৬০ ; N = ২,৫১৬

$$c = \text{৪৬'২২} - \text{৪৭'৫} = -\text{১'২৮}$$

$$(N_b - N_a)\, c = (\text{১৪৪৭} - \text{১০৬৯})(-\text{১'২৮})$$

$$= -\text{৪৮৩'৮৪}$$

$$N_m \frac{\left(\frac{i}{2} + c\right)^2}{2i} + N_{m'} \frac{\left(\frac{i}{2} - c\right)^2}{2i}$$

$$= \text{২৫০} \times \frac{[\frac{\text{৫}}{\text{২}} + (-\text{১'২৮})]^2}{\text{২} \times \text{৫}} + \frac{[\frac{\text{৫}}{\text{২}} - (-\text{১'২৮})]^2}{\text{২} \times \text{৫}} \times \text{২৫০}$$

$$= \text{৩৭'২১} + \text{৩৫৭'২১}$$

$$= \text{৩৯৪'৪২}$$

$\therefore$ গড় ব্যতিক্রম $\dfrac{\text{২৩১৭০'৫৮}}{\text{২৫১৬}}$

$$= \text{৯'২০}$$

ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম (Standard Deviation) :

সাধারণভাবে গড় ব্যতিক্রম নির্ণয় করার সময় যোগ-বিয়োগের চিহ্নগুলি গণণার মধ্যে আনা হয় না বলে বীজগণিতের দিক থেকে বলা যায় কতকটা অযৌক্তিক। ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম হিসাবের সময় চিহ্নগুলিকে গণণার মধ্যে নেওয়া হয়। সাধারণতঃ, গ্রীক অক্ষর সিগ্‌মা (σ) ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম বোঝাতে ব্যবহার করা হয়। গড় ব্যতিক্রম নির্ণয়ে সাধারণতঃ মধ্যমারই সাহায্য নেওয়া হয়, কিন্তু ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম নির্ণয়ের জন্য কাজে লাগান হয় সাধারণ গড়। প্রথমে নির্ণয় করা হয় সাধারণ গড় থেকে প্রত্যেক শ্রেণী-সংখ্যার ব্যতিক্রম কতখানি ; তারপর সেই ব্যতিক্রমগুলির বর্গ নেওয়া হয় ; বর্গ ব্যতিক্রমগুলি যোগ করে মোট শ্রেণী-সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয়। ভাগফলের বর্গমূলই হ'ল ষ্ট্যাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন্ বা ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম।

গণিতের ভাষায় বলা যায়—

$$\text{ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম} = \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N}}$$

টেবল্—নং ৩৩

মধ্য-বিন্দু (m)	উদাহরণ-সংখ্যা (f)	mf	ব্যতিক্রম d	d^2	fd^2
৬	৩	১	−৩	৯	২৭
৭	৫	৩৫	−২	৪	২০
৮	৭	৫৬	−১	১	৭
৯	১০	৯০	০	০	০
১০	৭	৭০	+১	১	৭
১১	৫	৫৫	+২	৪	২০
১২	৪	৬৬	+৩	০	২৭
	৪০	৩৬০			১০৮

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{১০৮}{৪০}} = \sqrt{২\cdot৭} = ১\cdot৬৪৪$$

সাধারণ গড় একটা পূর্ণ-সংখ্যা হ'লে এই উপায়ে ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম নির্ণয় করা সুবিধাজনক, যেমন এখানে হয়েছে। কিন্তু, ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ থেকে গড় নির্ণয় করতে গেলে সব সময় পূর্ণ-সংখ্যা পাওয়া যায় না। সুতরাং, তার জন্য একটু পৃথক উপায় অবলম্বন করতে হয়। এই উপায়কে 'শর্টকাট মেথড্' বা সংক্ষিপ্ত প্রণালী বলা হয়। প্রকৃত গড় থেকে ব্যতিক্রম না ধরে একটা কল্পিত গড় থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করা হয়। প্রণালীটা সংক্ষেপে এইরূপ :

(১) প্রায় মধ্যমার কাছাকাছি একটা শ্রেণীর মধ্য-বিন্দুকে কল্পিত গড় বলে ধর

(২) এই বিন্দু থেকে প্রত্যেক শ্রেণীর উদাহরণগুলির ব্যতিক্রম নির্দ্ধারণ করে শ্রেণী-অন্তরের গুণণীয়ক হিসাবে লেখ

(৩) ব্যতিক্রমগুলিকে শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে গুণ কর

(৪) এখন বীজগণিত অনুসারে ব্যতিক্রমগুলির যোগফল নিয়ে উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে ভাগ দাও

(৫) ভাগফলের বর্গ নির্ণয় কর

(৬) ব্যতিক্রমগুলির বর্গ নির্ণয় কর ও শ্রেণীর উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে গুণ কর

(৭) এখন এই বর্গ ব্যতিক্রমগুলি যোগ করে উদাহরণ-সংখ্যা দিয়ে ভাগ দাও

(৮) এবার, (৭) নং প্রক্রিয়ায় পাওয়া ভাগফল থেকে (৪) নং প্রক্রিয়ায় পাওয়া ভাগফল বাদ দিয়ে বর্গমূল নাও

(৯) এই বর্গমূলকে শ্রেণী-অন্তর দিয়ে গুণ কর। এই গুণফলই হ'ল ষ্ট্যাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন।

টেবল্ নং ৩২

গ্রাম্য শিক্ষকের আয় (টাকা)	মধ্য-বিন্দু (m)	কতজনের আয় (f)	d'	fd'	$f(d')^2$
৭·০ থেকে ১২·৫	১০	২	−২	−৪	৮
১২·৫ „ ১৭·৫	১৫	২০	−১	−২০	২০
১৭·৫ „ ২২·৫	২০	১৬	০	০	০
২২·৫ „ ২৭·৫	২৫	১২	+১	+১২	১২
২৭·৫ „ ৩২·৫	৩০	৪	+২	+ ৮	১৬
৩২·৫ „ ৩৭·৫	৩৫	৩	+৪	+ ৯	২৭
৩৭·৫ „ ৪২·৪	৪০	১	+৪	+ ৪	১৬
		N = ৫৮		$\Sigma fd'$ = +৯	$\Sigma f(d')^2$ = ৯৯

যদি, শ্রেণী-অন্তর $= i =$ ৫

উদাহরণ $= f$ $\therefore$ $\Sigma f = N =$ উদাহরণ − সংখ্যা = ৫৮

$$c = \frac{\Sigma fd'}{N} = \frac{+৯}{৫৮}$$

$$\therefore \quad c^2 = \frac{৮১}{(৫৮)^2} = \frac{৮১}{৩৩৬৪}$$

d' = কল্পিত গড় থেকে ব্যতিক্রম

$$S_a = \sqrt{\frac{\Sigma f(d')^2}{N}}$$

$$S_a{}^2 = \frac{\Sigma f(d'')}{N} = \frac{৯৯}{৫৮}$$

তা'হলে,

$$\text{ষ্ট্যাণ্ডার্ড গড়} = \sigma = \sqrt{S_a{}^2 - c^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{৯৯}{৫৮} - \frac{৮১}{৫৮^2}} \times ৫$$

$$= \sqrt{১\cdot৬৮} \times ৫ = ৬\cdot৪৭৫$$

কোয়ার্টাইল :

পূর্ব্বেই বলেছি যে কোন সমষ্টির এককগুলিকে সারিবন্দী করে সাজালে মাঝের সংখ্যাটী হয় মধ্যমা ; তেমনি, যে সংখ্যাগুলি সারিবন্দী সমষ্টিকে চারখণ্ডে বিভক্ত করে তাদের বলে কোয়ার্টাইল, যেগুলি দশ অংশে বিভক্ত করে তাদের বলে ডেসাইল, যেগুলি একশত অংশে বিভক্ত করে তাদের বলে পার্সেণ্টাইল্ ইত্যাদি। সমষ্টিকে চার অংশে বিভক্ত করলে প্রথম অংশ হবে প্রথম কোয়ার্টাইল; দ্বিতীয় অংশ, দ্বিতীয় কোয়ার্টাইল, ইত্যাদি। তেমনি, সমষ্টিকে শত অংশে বিভক্ত করলে, প্রথম অংশ হবে প্রথম পার্সেণ্টাইল, দ্বিতীয় অংশ, দ্বিতীয় পার্সেণ্টাইল, ইত্যাদি। সুতরাং, বলা যায় যে, একটা সমষ্টির দ্বিতীয় কোয়ার্টাইল্ বা পঞ্চম ডেসাইল্ বা পঞ্চাশৎ পার্সেণ্টাইল হ'ল মধ্যমা। একটা সমষ্টির ১০৩টী একককে যদি সারিবন্দী করে সাজান যায়, তাহ'লে, ২৬তম সংখ্যাটী হবে প্রথম কোর্টাইল, ৫২তম সংখ্যাটী মধ্যমা বা দ্বিতীয় কোয়ার্টাইল, আর ৭৮তম সংখ্যাটী হবে তৃতীয় কোয়ার্টাইল্। সমষ্টির একক সংখ্যা বিজোড় না হয়ে যদি জোড় হ'ত তা'হলে, মধ্যমা, কোয়ার্টাইল ইত্যাদি এত সহজে নির্ণয় করা চল্‌ত না। ১০০টী এককের সমষ্টির মধ্যমা হবে ৫০তম এবং ৫১ তম সংখ্যার মাঝামাঝি ; তৃতীয় কোয়ার্টাইল্ থাকবে ৭৫তম এবং ৭৬তম সংখ্যার মাঝামাঝি ; আর, প্রথম কোয়ার্টাইল ২৫-তম এবং ২৬-তম সংখ্যার মাঝামাঝি। সহজ কথায় বলা যায় যে—

মধ্যমা হ'ল $= \frac{n+১}{২}$ সংখ্যা (একক)

প্রথম কোয়ার্টাইল $= \frac{n+১}{৪}$ সংখ্যা (একক)

তৃতীয় " $= \frac{(n+১) \times ৩}{৪}$ সংখ্যা (একক)

প্রথম ডেসাইল্ $= \frac{n+১}{১০}$ সংখ্যা (একক)

৭.প্তম „ $= \frac{(n+১)\times ৭}{১০}$ সংখ্যা (একক)

২৯ পার্সেণ্টাইল $= \frac{(n+১)}{১০০} \times ২৯$ সংখ্যা (একক) ইত্যাদি।

ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ থেকে কোয়ার্টাইল, ডেসাইল্ প্রভৃতি নির্দ্ধারণ করতে হলে যে পদ্ধতিতে মধ্যমা নির্ণয় করা হয় সেই পদ্ধতিই অবলম্বন করতে হবে। যদি—

$D_১$ = প্রথম ডেসাইল্

$D_৯$ = নবম „

$Q_১$ = প্রথম কোয়ার্টাইল

$Q_৩$ = তৃতীয় কোয়ার্টাইল

M_D = মধ্যমা হয়

তাহ'লে, টেবল্ নং ৩২ থেকে পাই—

$$D_১ = ৩০ + \frac{২৫১.৬ - ২১}{২৯৫ - ২১} \times ৫ = ৩০ + ৪.২$$
$$= ৩৪.২$$

$$Q_১ = ৩৫ + \frac{৬২৯ - ২৯৫}{৭৯৫ - ২৯৫} \times ৫ = ৩৫ + ৩.৩৪$$
$$= ৩৮.৩৪$$

$$M_D = ৪৫ + \frac{১২৫৮ - ১১৯৭}{১৪৪৭ - ১১৯৭} \times ৫ = ৪৫ + ১.২২$$
$$= ৪৬.২২$$

$$Q_৩ = ৫৫ + \frac{১৮৮৭ - ১৮০৪}{২২০১ - ১৮০৪} \times ৫ = ৫৫ + ১.১৮$$
$$= ৫৬.১৮$$

$$D_৯ = ৬০ + \frac{২২৬৪.৪ - ২২০১}{২৩৫৩ - ২২০১} \times ৫ = ৬০ + ২.০৮$$
$$= ৬২.০৮$$

গ্রাফের সাহায্যেও কোয়ার্টাইল, ডেসাইল প্রভৃতি সহজেই নির্ণয় করা যায়। ডেটাগুলিকে প্রথমে স্থাপন করে অগিভ্ এঁকে নিতে হয়; তার পর উল্লম্ব রেখাটীর উপর, অর্থাৎ, Y-অক্ষরেখার উপর মধ্যমা, কোয়ার্টাইল

(প্রয়োজন) অনুসারে $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$, $\frac{N}{10}$, $\frac{9N}{10}$, ... চিহ্নিত করতে হয়। এই বিন্দু থেকে ভূমিরেখার সঙ্গে সমান্তর করে একটা রেখা টান্‌তে হবে। অনুভূমিক রেখাটী অগিভ্‌কে যেখানে ছেদ করবে সেই বিন্দু থেকে X-অক্ষরেখার উপর লম্বপাত করলে যে-বিন্দুতে X-অক্ষরেখাকে ছেদ করবে সেই বিন্দু নির্দ্দেশ কর্‌বে কোয়ার্টাইল্‌, মধ্যমা, ডেসাইল প্রভৃতি।

কোয়ার্টাইল্‌ ডেভিয়েশন্‌ঃ

প্রথম ও তৃতীয় কোয়ার্টাইলের অন্তরের অর্দ্ধেক হ'ল কোয়ার্টাইল্‌ ডেভিয়েশন্‌ বা কোয়ার্টাইল্‌ ব্যতিক্রম। যদি Q.D = কোয়ার্টাইল ব্যতিক্রম হয়, তা'হলে—

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

টেবল্‌ নং ৩২ থেকে পাই

$$Q.D. = \frac{৫৬.১৮ - ৩৮.৩৭}{২} = \frac{১৭.৮৪}{২}$$

$= ৮.৯২$

কোইফিসিয়েণ্ট অফ্‌ ভ্যারিয়েশন্‌ঃ

ব্যতিক্রম (ডেভিয়েশন) ধরে দুটী বিভিন্ন টেবলের তুলনা করা চলে না; তারজন্য প্রয়োজন হয় "আপেক্ষিক বৈষম্য" বা "রিলেটিভ্‌ ভ্যারিয়েশন্‌" জানা। আপেক্ষিক বৈষম্য নির্ণয়ের একটা সূত্র দিয়েছেন কার্ল-পিয়ার্সন। সাধারণ গড়ের শতকরা হিসাবে ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রমকে ব্যক্ত কর্‌লেই পাই "কোইফিসিয়েণ্ট অফ্‌ ভ্যারিয়েশন্‌"।

যদি V = কোইফিসিয়েণ্ট অফ্‌ ভ্যারিয়েশন্‌

σ = ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম

এবং M = সাধারণ গড় হয়,

$$\text{তা'হলে,}\quad V = \frac{\delta}{M} \times ১০০$$

এই সূত্র অবলম্বন করে টেবল্‌ নং ৩৪ থেকে পাই

$$V = \frac{৬.৪৭৫}{২১.৮} \times ১০০ = ৩১.১$$

অন্যান্য ব্যতিক্রমকেও সাধারণ গড়ের শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা যায়। তবে সেগুলির চলন নেই; পিয়ার্সনের কোইফিসিয়েণ্টই চলে।

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

স্কিউনেস্ঃ

ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ সম্পর্কিত আলোচনায় সামঞ্জস্যর (সিমেট্রী) অভাব বোঝাতেই 'স্কিউনেস্' শব্দ প্রয়োগ করা হয়। অর্থাৎ, ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্ থেকে যদি মোড্ নেওয়া যায়, এবং ঐ মোড্ থেকে সমান দূরে উপরে-নীচে যদি দৃষ্টি দেওয়া যায়, তা'হলে, সেই শ্রেণী-যুগলের উদাহরণ-সংখ্যা সমান থাকবে না। একটা হিস্টোগ্রাম এঁকে নিলে স্কিউনেস্ বলতে কি বোঝায় বোঝা সহজ হবে। সামঞ্জস্যের অভাব না থাকলে কার্ভ্ আঁকলে কার্ভের রূপ হয় মাটীর ওপর রাখা ঘণ্টার মত। স্কিউনেস্ যত বেশী থাকবে ঘণ্টাকৃতি কার্ভের চেহারাও তত বদলাবে। সামাজিক ঘটনা সম্পর্কিত তথ্য নিয়ে কার্ভ আকলে দেখা যায় যে তাতে স্কিউনেস্ আছে অনেক।

ফ্রিকোয়েন্সী কার্ভ যদি সম্পূর্ণ সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়, তা'হলে গড়, মধ্যমা ও মোড্ হয় সমবিন্দু। বৈষম্য যত প্রকট হয়, গড় ও মোডের তফাৎ ততই বেড়ে যায়। তুলনামূলক আলোচনার সুবিধার জন্য স্কিউনেসের কোইফিসিয়েণ্ট জানাও প্রয়োজন। কোইফিসিয়েণ্ট নির্ণয়ের এক সূত্র দিয়েছেন কার্ল পিয়ার্সন; সেটা এই—

$$\text{স্কিউনেস্ } (Sk) = \frac{M - Mo}{\sigma}$$

এখানে, M = গড়

Mo = মোড

এবং σ = স্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম

সাধারণতঃ, মধ্যমা থাকে গড় ও মোডের মাঝখানে, গড় থেকে ⅓ দূরে। সুতরাং, স্কিউনেস্ নির্ণয়ে নীচের সূত্রও কাজে লাগান চলে—

$$Sk = \frac{3(M - Md)}{\sigma}$$

এখানে, Md = মধ্যমা

মোড্ নির্ণয়ের সুবিধা সব সময়ে হয় না বলে মধ্যমা থেকে স্কিউনেস্ নির্ণয়ের এক সূত্র দিয়েছেন বাউলী। মধ্যমা, প্রথম কোয়ার্টাইল ও তৃতীয় কোয়ার্টাইল এই তিনের উপর নির্ভর করে সূত্রটী বাঁধা হয়েছে। তৃতীয় কোয়ার্টাইল থেকে মধ্যমার যা অন্তর, তা থেকে, মধ্যমা ও প্রথম কোয়ার্টাইলের অন্তর বাদ দিলে যা হয়, তাকে তৃতীয় ও প্রথম কোয়ার্টাইলের অন্তর দিয়ে ভাগ দিলে পাওয়া যায় স্কিউনেস্।

যদি, তৃতীয় কোঃ—মধ্যমা $= Q_3 - Md$

মধ্যমা—প্রঃ কোঃ $= Md - Q_1$

তৃঃ কোঃ—প্রঃ কোঃ $= Q_3 - Q_1$ হয়,

তা'হলে, সূত্র দাঁড়ায়—

$$Sk = \frac{Q_3 - Md - (Md - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2Md}{Q_3 - Q_1}$$

আর এক সূত্র ধরেও স্কিউনেস্ নির্ণয় করা যায়। সূত্রটী এই—

$$Sk = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma f (d)^3}{N}}}{\sigma}$$

এখানে, f = উদাহরণ-সংখ্যা

d = ব্যতিক্রম

N = মোট উদাহরণ-সংখ্যা

σ = ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম

পঞ্চদশ অধ্যায়

হিষ্টোরিগ্রাম ঃ

এ পর্য্যন্ত যেসব তথ্য নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে, তার মধ্যে কাল (টাইম্) সম্বন্ধে বিশেষ কিছু বলাই হয় নি। বিভিন্ন কালের তথ্য নিয়ে আলোচনা করা সংখ্যা-বিজ্ঞানের একটা প্রধান অঙ্গ। পর পর বিভিন্ন সময়ের তথ্য সংগ্রহ করে সংখ্যায় প্রকাশ করলে সেই সংগৃহীত তথ্যকে বলা হয় "হিষ্টোরিক্যাল সিরিজ" (কাল-শ্রেণী) এবং সেই তথ্য অবলম্বন করে গ্রাফ্ তৈরী করলে সেই গ্রাফ্‌কে বলা হয় হিষ্টোরিগ্রাম। হিষ্টোগ্রামের সঙ্গে হিষ্টোরিগ্রামের কোন মিল নেই, হিষ্টোগ্রামে 'কাল'কে (টাইম্) ধর্ত্তব্যের মধ্যেই আনা হয় না। সাধারণতঃ, হিষ্টোরিগ্রামে X-অক্ষরেখার উপর নির্দ্দেশ করা হয় কাল (টাইম্), এবং অপর সংখ্যাগুলি নির্দ্দেশ করা হয় Y-অক্ষরেখায়। কোন তথ্য অবলম্বন করে গ্রাফ্ কাগজের উপর বিন্দুগুলি যখন সংস্থাপন করা হয়েছে, তখন, সেই বিন্দুগুলিকে সরলরেখা দিয়ে যোগ করে ধারাবাহিকতা বুঝিয়ে দেওয়া যায়। একই গ্রাফে দুই বা ততোধিক হিষ্টোরিগ্রাম আঁকা যায়। কোন সমষ্টির বিভিন্ন অংশের পরিচয় দেওয়াও সম্ভব একই গ্রাফে।

কার্ভের নীচের অংশ গ্রাফের উপর যখন কোন রকম রং বা শেড্ দিয়ে ভরিয়ে দেওয়া হয় তখন সেই চিত্রকে বলা হয় সার্ফেস্ চার্ট। সার্ফেস্ চার্টে যখন বিভিন্ন রং বা শেড্ দিয়ে স্তর ভেদ বুঝিয়ে দেওয়া হয়, তখন তাকে বলা হয় "স্তর চিত্র" বা ষ্ট্র্যাটা চার্ট। হিষ্টোরিগ্রাম্ সম্বন্ধে নীম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা যায়—

(১) শিরোনামায় স্পষ্টভাষায় লেখা থাকে কি বিষয়ের ও কোন কালের ঐ তথ্য

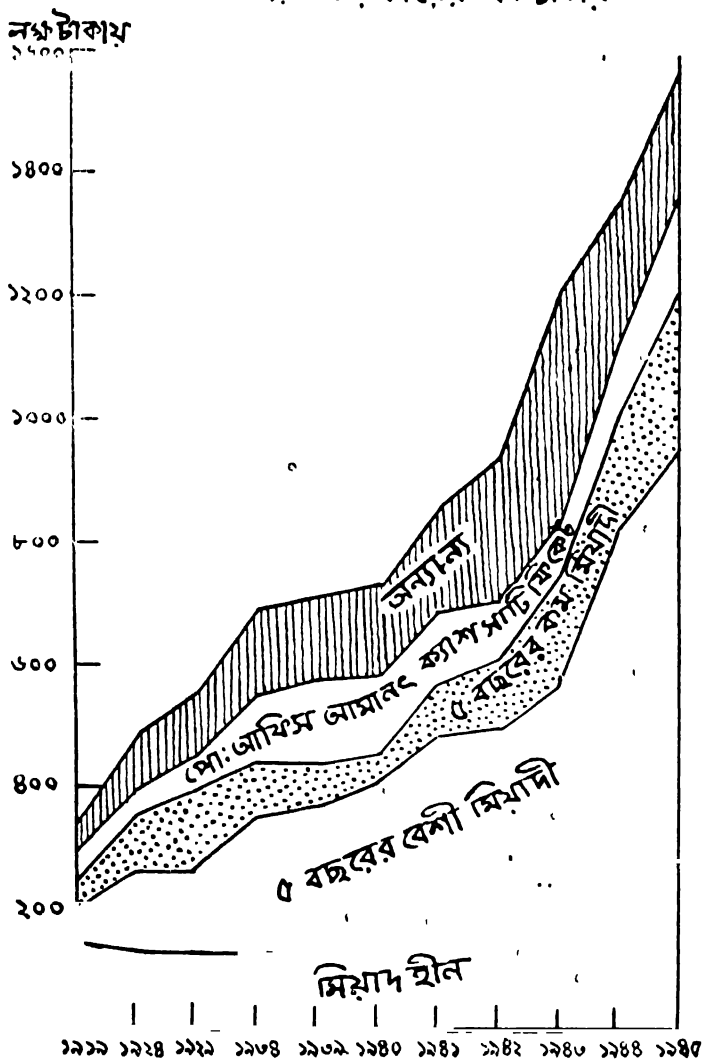
(২) শূন্য থেকে উল্লম্ব স্কেল সুরু হয় বলে বাড়া-কমার গুরুত্ব ধরা যায়

(৩) বিন্দুগুলির সংযোজক-রেখা অপেক্ষাকৃত মোটা করে আঁকা হয়

(৪) অক্ষরেখাগুলির বামে ও নীচে স্কেল নির্দ্দেশ করা হয়

কোন্ স্কেল ধরে কাল-শ্রেণীর তথ্যগুলি প্রকাশ করা হবে চিত্রে, তা নির্ভর করে উদ্দেশ্যের উপর। যদি উদ্দেশ্য হয় বিশুদ্ধ ভেদ (অ্যাব্সলিউট্ ভ্যারিয়েশন্)

চিত্র নং ৭

'স্তর চিত্র' বা ষ্ট্র্যাটা চার্ট

দেখান, তাহ'লে নিতে হবে বিশুদ্ধ স্কেল, অর্থাৎ, রাশিগুলি যেমন আছে সেই ভাবেই স্কেল নিতে হবে। আর, যদি উদ্দেশ্য হয় আনুপাতিক ভেদ দেখান তাহ'লে নিতে হবে রেশিও স্কেল। বিশুদ্ধ স্কেলে একাধিক কাল-শ্রেণীর পরিচয় দেওয়া যায় একই চিত্রে; তবে, সব সময়ে লক্ষ্য রাখা দরকার যাতে বিভিন্ন কার্ভ সহজেই বোঝা যায়। সব সময়ে মনে রাখা দরকার যে অপরকে কাল-শ্রেণীর তথ্যগুলি সহজে বুঝিয়ে দেওয়ার জন্যই গ্রাফ আঁকা। সুতরাং, একটা কার্ভ আর একটা কার্ভের গায়ে যদি এরকমভাবে লেপ্‌টে ধরে, বা এরকম হয় যে সহজে অনুধাবন করা যায় না, তাহ'লে গ্রাফ আঁকার উদ্দেশ্যেই ব্যর্থ হবে। উল্লম্ব স্কেলকে বিভিন্ন পরিমাপে ধরে, বিভিন্ন একক সম্বলিত কাল-শ্রেণীকে (টাইম্ সিরিজ) একই চিত্রে প্রকাশ করা যায়; তবে, তার চেয়ে উৎকৃষ্ট উপায় হ'ল টেবল্‌টীকে শতকরা হারে পরিবর্ত্তিত করে চিত্র আঁকাই। কাল-শ্রেণীর গোড়ার বছরটাকে ১০০ ধরে বাকী বছরের সংখ্যাগুলিকে শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করতে হয়; অথবা, গোড়ার পাঁচ কি দশ বৎসরের গড় নির্ণয় করে নিয়ে সেই গড়কে ১০০ ধরে বাকী বর্ষগুলিকে শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা হয়।

রেশিও স্কেল :

এ পর্য্যন্ত যে স্কেলের কথা বলেছি তাতে Y-অক্ষরেখার যে-কোন অংশই ধরি না কেন, স্কেলের সমান-দৈর্ঘ্য সমান-এককই বোঝায়। যেমন, স্কেলের উপর এক ইঞ্চি দৈর্ঘ্য যদি ১০০ মণ পরিমাণ বোঝায়, তাহ'লে স্কেলের উপর ৮০০, মণ ও ৯০০ মণ নির্দ্দেশক রেখার মাঝের যে দৈর্ঘ্য, তাও থাকবে ১ ইঞ্চি; তেমনি, ১৫০০ মণ ও ১৬০০ মণ নির্দ্দেশক স্কেলের অন্তরও থাক্‌বে ১ ইঞ্চিই। কিন্তু, রেশিও স্কেলে তা হবে না—স্কেলের উপর দুটী মাপের অন্তর হবে ঐ মাপ দুটীর রেশিওর সমানুপাতিক। রেশিও স্কেলে ১ ও ২এর অন্তর, হল ২ এবং ৪, বা ৪ এবং ৮ এর সমান। ২ ও ৪ এবং ৪ ও ৮ প্রত্যেক জোড়ারই রেশিও হ'ল ২ : ১। তেম্‌নি ১ ও ৩, ৩ ও ৯ বা ৪ ও ১২-র দূরত্ব স্কেলে হবে, একই। সুতরাং, রেশিও স্কেলে পর পর পূর্ণ রাশিগুলির দূরত্ব ১ থেকে রাশিগুলি যত বাড়্‌তে থাকে তত কমে আসে। এই ধরণের স্কেল পাওয়া সহজ হয় স্কেলের উপর সংখ্যাগুলির লগারিথিম্, ধর্‌লে। নীচে একটা লগারিথিম্ টেবল্ দেখান হয়েছে।

টেব্‌ল্‌ নং ৩৫

সংখ্যা	১	২			৫	৬				১০	১১	১২
লগ	০	·৩০১	·৪৭৭	·৬০২	·৬৯৯	·৭৭৮	·৮৪৫	·৯০৩	·৯৫৪	১·০	১·০৪১	১·০৭৯

রেশিও স্কেল সম্বলিত গ্রাফ্‌ কাগজ সহজেই তৈরী করে নেওয়া যায়। এবং সাধারণ গ্রাফ্‌ কাগজে যেভাবে চিত্র আঁকা হয়, এই কাগজেও সেইভাবেই চিত্র আঁকা চলে। এই ধরণের গ্রাফ্‌ কাগজকে "লগারিথিম্‌ পেপার" বলে। লগারিথিম্‌ কাগজ পাওয়া না গেলে সাধারণ গ্রাফ্‌ কাগজে কাল-শ্রেণীর (টাইম্‌ সিরিজ) সংখ্যাগুলি যথাযথভাবে না নিয়ে, সেই সংখ্যাগুলির লগারিথিম্‌ নিয়ে বিন্দু সংস্থাপন করে কার্ভ আঁকা চলে।

স্বাভাবিক স্কেলে আঁকা গ্রাফের সঙ্গে, রেশিও স্কেলে আঁকা গ্রাফের তুলনা করলে পাই—

স্বাভাবিক স্কেলে—	**রেশিও স্কেলে—**
(১) উল্লম্ব রেখায় সমান দূরত্ব সমান বিশুদ্ধ (অ্যাবসলিউট্‌) পরিবর্ত্তন নির্দ্দেশ করে। চিত্রটি যদি সরল রেখার রূপ নেয় তাহ'লে বুঝ্‌তে হবে যে সরল কুসীদ হারে ক্রমান্বয়ে বেড়ে চলেছে	(১) উল্লম্ব রেখায় সমান দূরত্ব সমান সমানুপাতিক পরিবর্ত্তন নির্দ্দেশ করে। চিত্রটী যদি সরল রেখার রূপ নেয় তাহলে বুঝতে হবে ক্রমান্বয়ে বেড়ে গেছে চক্রবৃদ্ধিহা'র সুদে
(২) একটা সমষ্টিকে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করা সহজ হয়	(২) তা করা সহজ হয় না
(৩) শূন্য ও নেগেটিভ্‌ মান দেখান চলে	(৩) এগুলি দেখান চলে না
(৪) একটা বেস্‌ রেখা ধরে অবস্থান নির্দ্দেশ করা প্রয়োজন হয়	(৪) কোন বেস্‌ লাইন দরকার হয় না ; সমগ্র কার্ভটাকে ওঠান-নামান চলে এবং তাতে মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না
(৫) Y-রেখার মানে যখন প্রচণ্ড ভেদ দেখা যায় তখন ব্যবহার করা সুবিধাজনক হয় না	(৫) কিন্তু এই স্কেলে সে সুবিধা আছে

ষোড়শ অধ্যায়

কাল-শ্রেণী (টাইম্ সিরিজ) বিশ্লেষণ ঃ

কাল প্রবাহের সঙ্গে ঘটনার পরিবর্ত্তন হয়। অর্থনীতিজ্ঞ ও সংখ্যাবিজ্ঞানীর অন্যতম কাজ হ'ল সেই পরিবর্ত্তনের ব্যাখ্যা। যেমন, কয়লা-উৎপাদন-সংক্রান্ত বিভিন্ন বৎসরের তথ্য পরীক্ষার বিষয়বস্তু হলে, স্বতঃই মনে প্রশ্ন জাগে উৎপাদন হারের তারতম্য হবার কারণ কি। বিবিধ কারণের সমাবেশে উৎপাদনের পরিমাণ বাড়ে-কমে। কয়লার টান (চাহিদা) যদি বেশী থাকে তা'হলে অধিকতর পরিমাণে উৎপাদন করবার একটা ঝোঁক দেখা যায়। কয়লার টান সব সময়ে সমান থাকে না ; ষ্ট্রাইক্, যেমন উৎপাদন কমাতে পারে, তেমনি, উন্নত ধরণের যন্ত্রপাতি ব্যবহারের ফলে উৎপাদন বেড়ে যেতে পারে। কয়লা খনির উৎপাদন সম্বন্ধে যে কাল-শ্রেণী (টাইম্ সিরিজ) পাওয়া যায়, সে সব হ'ল এই ধরণের বিভিন্ন কারণের সম্মিলিত ফল। কারণগুলির হদিশ পেলে তাদের প্রতিক্রিয়া কি হবে আঁচ করা যায়।

হেতুগুলি বিশ্লেষণ করে দেখা যাক। (যেগুলির ফলে নির্দ্দিষ্ট ধরণের প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা যায় সেইসব হেতুর কথাই বলা হচ্ছে)। কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ের কথা ধরলে, বলা যায় যে, সেই সময়ের পৃথিবীর লোকসংখ্যা নির্দ্দিষ্ট, আবাদী-অনাবাদী জমির পরিমাণ নির্দ্দিষ্ট, গৃহপালিত পশুপক্ষীর সংখ্যাও নির্দ্দিষ্ট। সময় যত যেতে থাকে আবাদী জমির পরিমাণও বদলায়; পালিত পশুপক্ষীর সংখ্যাও পরিবর্ত্তিত হয়। এ পর্য্যন্ত পৃথিবীতে এই সবের সংখ্যা বা পরিমাণ বেড়েই গেছে এবং সেজন্য কোন কোন পণ্যের চাহিদাও বেড়ে গেছে, ফলে যোগানও বেড়েছে। সুতরাং, বলা যায় যে, এইসব ক্ষেত্রে "বৃদ্ধির" উপাদানই শ্রেণীর (সিরিজের) পরিবর্ত্তনের কারণ। বৃদ্ধির উপাদানের (growth factor) প্রতিক্রিয়ায় কোন কাল-শ্রেণীর মধ্যে যে পরিবর্ত্তন লক্ষ করা যায় তাকে বলে 'সেকুলার ট্রেণ্ড' বা "যুগব্যাপী ঝোঁক"।

আর এক শ্রেণীর হেতু আছে, যেগুলি অবিচ্ছিন্নভাবে কার্য্য করে না, নিয়মিত ভাবে মাঝে মাঝে প্রভাবান্বিত করে। যেমন, ঋতু বা দিন-রাত ; বছরের

পর বছর একইভাবে ঋতু পরিবর্ত্তন হয়, দিনের পর রাত, রাতের পর দিন হয়। পৃথিবীর কোন কোন অঞ্চলে নিয়মিতভাবে বরফ জমে বন্দরগুলি শীতকালে অব্যবহার্য্য হয়ে পড়ে, আবার গ্রীষ্মে নৌবাহ্য হয়। তেম্‌নি, কোন কোন দেশে বর্ষায় খাল-বিল ভরে ওঠে, আবার, গ্রীষ্মের কাঠফাটা রোদে শুষ্ক বালুচরে পরিণত হয়। বর্ষাগমে বীজ বুনে হেমন্তে শষ্য কাটা হয়। এই ধরণের কারণের ফলাফল নিয়মিতভাবে ঘটতে দেখা যায়। এই ধরণের নিয়মানুগত ওঠা-নামাকে বলা হয় "ঋতুক্রমে পরিবর্ত্তন"। শীতপ্রধান দেশে শীতকালে কয়লার চাহিদা যতখানি থাকে, গ্রীষ্মে তা থাকে না। ঋতু অনুযায়ী চাহিদার বাড়া-কমার সঙ্গে সঙ্গে কয়লার উৎপাদনও বাড়ে-কমে। এই বাড়া-কমাটা ঋতুক্রমে (Seasonal)।

ঊনবিংশ শতাব্দীর বহুবিধ অর্থনৈতিক তথ্য নিয়ে আলোচনা করে দেখা গেছে যে ৭—১১ বছর অন্তর প্রায় একই ধারায় ব্যবসা বাণিজ্য ওঠা-নামা করেছে। কেন এইভাবে চক্রক্রমে ওঠা-নামা লক্ষ্য করা যায় সে বিষয়ে কোন নিঃসন্দেহ উত্তর দেওয়া যায় না, তবে এই চক্রক্রমে ওঠা-নামার অস্তিত্ব সম্বন্ধে কোন সন্দেহ নেই। যে ক'বছর ওঠার দিকেই ঝোঁক লক্ষ্য করা যায়, সেই ক'বছরকে বলা হয় "বুম" বছর, আর, যে ক'বছর নামার দিকে ঝোঁক দেখা যায়, সেই ক'বছরকে বলা হয় "মন্দা" বা "সঙ্কট" বছর। আর এই ওঠা-নামাকে বলা হয় "বাণিজ্য-চক্র" (ট্রেড-সাইক্‌ল্)। কাল-শ্রেণী বিশ্লেষণে এই ওঠা-নামার পর্য্যায় ও পরিসর নির্ণয় করতে হয়।

কাল-শ্রেণীতে যে সব নিয়মিত ওঠা-নামা লক্ষ্য করা যায় তাদের কথাই এ পর্য্যন্ত বলেছি। এ ছাড়া আর এক শ্রেণীর হেতু আছে যার ফলে যথেচ্ছভাবে কাল-শ্রেণীতে ওঠা-নামা লক্ষ্য করা যায়। হঠাৎ বন্যা এসে কোন দেশের চাষের জমি, শষ্য, এবং বাড়ী-ঘরদোরের প্রভূত ক্ষতি করতে পারে, ফলে লোকজনও বহুল পরিমাণে মরতে পারে; ধর্ম্মঘটের ফলে কল-কারখানার কাজকর্ম্ম সাময়িকভাবে বন্ধ হতে পারে; আগুন লেগে, ভূমিকম্পে, বিদ্রোহে প্রভৃতিতে উৎপাদন ও বণ্টনে বহু বিপর্য্যয় লক্ষ্য করা যেতে পারে। এই সব কারণগুলি হঠাৎ হঠাৎ দেখা দেয়, কোন নিয়মানুগতা নেই। এদের প্রতিক্রিয়া স্বল্প বা অধিক হতে পারে, তবে

এগুলি যে আছে সে বিষয়ে সন্দেহ কোন নেই। সুতরাং, উপরের আলোচনা থেকে দেখছি যে-কোন কাল-শ্রেণী বিশ্লেষণ করতে গেলে তিনরকম পরিবর্ত্তনের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে—

(১) সাধারণ ঝোঁক

(২) নিয়মিত ওঠা-নামা—

(ক) ঋতুক্রমে

(খ) চক্রক্রমে

(৩) নিয়মহীন ওঠা-নামা

সাধারণতঃ, আমরা বিশ্লেষণ করে কাল-শ্রেণীকে এই তিন ভাগে ভাগ করি। যখন দুই বিভিন্ন কাল-শ্রেণীর তুলনা করি, তখন এই খণ্ড খণ্ড অংশের সঙ্গে খণ্ড খণ্ড অংশের সম্বন্ধ নির্ণয় করি। কোন কোন কাল-শ্রেণীর মধ্যে এই ত্রিবিধ পরিবর্ত্তনই বর্ত্তমান, তা না হ'লে ওঠা-নামা লক্ষ্য করা যেত না। সমস্যাটাকে একটু উল্টো দিক থেকে দেখার চেষ্টা করা যাক। অর্থাৎ, বিভিন্ন অংশে বিশ্লেষণ না করে খণ্ড খণ্ড অংশ থেকে কি ভাবে শ্রেণী (সিরিজ) তৈরী হয় দেখা যাক। মনে কর, এক বছর অন্তর-অন্তর ডেটা নিয়ে শ্রেণী তৈরী হয়েছে; এই শ্রেণীর মধ্যে ঋতুক্রমে পরিবর্ত্তন থাকলেও তা' সম্পূর্ণভাবে লুক্কাইত। সাধারণ ঝোঁক, চক্রক্রমে ওঠা-নামা ও নিয়মহীন ওঠা-নামা—এই তিন মিলিয়েই শ্রেণী (সিরিজ) তৈরী হয়েছে।

টেব্‌ল নং ৩৭

বর্ষ	সাধারণ ঝোঁক	চক্রক্রমে ওঠা-নামা	নিয়মহীন ওঠা-নামা	কাল-শ্রেণী
(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)
১	১৩·০	+১	− ০·৪	১৩·৬
২	১৩·১	+·৫	+ ১·৮	১৫·৪
৩	১৩·২	০	− ১·৭	১১·৫
৪	১৩·৩	−·৫	+ ০·৪	১৩·৭
৫	১৩·৪	−১	+ ১·২	১৩·৬
৬	১৩·৫	− ৫	− ০·৩	১২·৭
৭	১৩·৬	০	+ ০·৬	১৪·২
৮	১৩·৭	+·৫	− ০·২	১৪·০
৯	১৩·৮	+১	− ০·৬	১৪·২
১০	১৩·৯	+·৫	+ ০·৪	১৪·৮
১১	১৪·০	০	০	১৪ ০
১২	১৪·১	−·৫	− ০·৭	১৫·৩

এই টেব্‌লে, (৫) নং স্তম্ভে যে কাল-শ্রেণী দেওয়া হয়েছে, তা কি ভাবে তৈরী হয়েছে তা দেখান হয়েছে। আমাদের প্রশ্ন হচ্ছে যে, (৫) নং স্তম্ভের মত কাল-শ্রেণী পেলে তাকে বিশ্লেষণ করে কিভাবে (২), (৩) ও (৪) নং স্তম্ভের মত বিভিন্ন অংশে ভাগ করা যায়।

বিশ্লেষণ করবার সহজ উপায় হ'ল, প্রথমতঃ, নিয়মিত বা নিয়মহীন ওঠা-নামার কথা বাদ দিয়ে কেবল সাধারণ ঝোঁক নিরূপণ করা। সাধারণ ঝোঁক নিরূপণ করার পর মোট ওঠা-নামা নির্ণয় করা প্রয়োজন। তারপর মোট ওঠা-নামা থেকে 'নিয়মিত ওঠা-নামা'র অংশ নির্ণয় করতে হয়। নিয়মিত ওঠা-নামা জান্‌লে বাদ দিয়ে নিয়মহীন ওঠা-নামা ঠিক করে নেওয়া যায়। কি করে এই সব করা যায় এবার আলোচনা করে দেখা যাক।

ওঠা-নামাগুলি অপসারণ করা যায় যদি নাকি কাল-শ্রেণীটাকে গ্রাফে প্রকাশ করা যায়, এবং গ্রাফের কোণাগুলি হাতে এঁকে মেরে দিয়ে (স্মুথিং) স্মুথ্‌ড্‌ গ্রাফে সাধারণ ঝোঁক্‌ প্রকাশ করা যায়। এই উপায় কিন্তু সন্তোষজনক নয়, কেননা, বিভিন্ন লোকে গ্রাফ্‌টিকে বিভিন্নভাবে 'স্মুথ্‌' (মসৃণ) করতে পারে।

ওঠা-নামা অপসারণের প্রকৃষ্টতর উপায় হ'ল 'চলিষ্ণু গড়' (মুভিং অ্যাভারেজ) ব্যবহার। কয়েক বৎসরের গড় নিয়ে সেই গড়কে যে ক'বছরের গড় নেওয়া হয়েছে তার মাঝের বছরের সাধারণ ঝোঁক বলে ধরা হয়। নীচের টেব্‌লে এইভাবে ৫, ৭, ও ৯ বছর অন্তর চলিষ্ণু গড় নিয়ে দেখানো হয়েছে। পঞ্চবার্ষিক চলিষ্ণু গড় হ'ল ১৯১৮-১৯, ১৯১৯-২০, ১৯২০-২১, ১৯২১-২২ ও ১৯২২-২৩এর গড়; তেম্‌নি ১৯১৮-১৯, ১৯১৯-২০, ১৯২০-২১, ১৯২১-২২, ১৯২২-২৩, ১৯২৩-২৪, ১৯২৪-২৫ এর গড় হ'ল সপ্তবার্ষিক চলিষ্ণু গড়। অন্যান্য গড়ও এই ভাবেই হিসাব করা হয়। আর এই গড়কে দেখান হয় কেন্দ্রীয় বৎসরের বিপরীতে; যেমন, পঞ্চমবার্ষিক গড়ের প্রথম গড় দেখান হয়েছে ১৯২০-২১ বছরে। বিজোড় বর্ষ-সংখ্যা নিয়ে গড় নির্ণয় করলে কেন্দ্রীয় বৎসর নিরূপণ করা সহজ হয়। জোড় বৎসর নিলে, চলিষ্ণু গড় নির্ণয় করে, দুটী চলিষ্ণু গড়ের গড় নিতে হয়। এবং প্রথম চলিষ্ণু গড়ের বিপরীতে দেখাতে হয়। কাল-শ্রেণী (টাইম সিরিজ)

অবলম্বন করে যে কার্ভ আঁকা হয়, গড় নেওয়ার উদ্দেশ্যই হ'ল তাকে স্মুথ করে আনা। সাধারণভাবে বলা যায় যে, গড় নিতে যত বেশী বছর ধরা হ'বে কার্ভ তত বেশী 'স্মুথ' হবে।

টেবল্—নং ৩৮

চেক্ ক্লিয়ারিং-এর পরিমাণ—ভারতবর্ষ

শতকোটী টাকায় হিসাব

বর্ষ	মূল তথ্য	পঞ্চবর্ষ যোগফল	পঞ্চবর্ষ চলিষ্ণু গড়	সপ্তবর্ষ যোগফল	সপ্তবর্ষ চলিষ্ণু গড়	নয়বর্ষ যোগফল	নয়বর্ষ চলিষ্ণু গড়
১৯১৮-১৯	১৪·৩						
১৯১৯-২০	২০·৯						
১৯২০-২১	২৯·৮	১০৫·৮	২১·১৬				
১৯২১-২২	২০·২	১০৯·৫	২১·৯০	১৪১·৯	২০·৩		
১৯২২-২৩	২০·৬	১০৬·৭	২১·৩৪	১৪৪·৫	২০·৬	১৭৪·৯	১৯·৪
১৯২৩-২৪	১৮·০	৯১·৮	১৮·৭৬	১২৯·৭	২০·০	১৭৭·৩	১৯·৭
১৯২৪-২৫	১৮·১	৮৯·৭	১৭·৯৪	১২৬·৬	১৮·৯	১৭৬·২	১৯·৬
১৯২৫-২৬	১৬·৯	৮৫·৮	১৭·১৮	১২৬·২	১৮·৩	১৬৬·৪	১৮·৫
১৯২৬-২৭	১৬·১	৮৭·৬	১৭·৫২	১২৫·৬	১৭·৯	১৬৩·৫	১৮·২
১৯২৭-২৮	১৬·৭	৮৯·৫	১৭·৯০	১২৪·৯	১৭·৯	১৫৮·১	১৭·৬
১৯২৮-২৯	১৯·৮	৮৯·৯	১৭·৯৪	১২২·০	১৭·৪	১৫৬·৩	১৭·৪
১৯২৯-৩০	২০·০	৮৯·০	১৭·৮০	১২১·৩	১৭·৩	১৫৪·৬	১৭·২
১৯৩০-৩১	১৭·৩	৮৮·৫	১৭·৭০	১২১·৬	১৭·৪	১৫৫·০	১৭·৩
১৯৩১-৩২	১৫·২	৮৫·১	১৭·০২	১২২·২	১৭·৫	১৫৭·৩	১৭·৫
১৯৩২-৩৩	১৬·২	৮২·৪	১৬·৪৮	১২০·৮	১৭·৩	১৫৯·৯	১৭·৭
১৯৩৩-৩৪	১৬·৪	৮৩·৫	১৬·৭০	১২০·১	১৭·১	১৬০·৬	১৭·৮
১৯৩৪-৩৫	১৭·৩	৮৭·৬	১৭·৫২	১২৩·৩	১৭·৬	১৬০·৩	১৭·৮
১৯৩৫-৩৬	১৮·৪	৯১·৯	১৮·৩৮	১২৭·৮	১৮·৩	১৬৬·২	১৮·৫
১৯৩৬-৩৭	১৯·৩	৯৫·২	১৯·০৪	১৩৪·৮	১৯·৩	১৭২·৫	১৯·২
১৯৩৭-৩৮	২০·৫	১০১·১	২০·২২	১৩৯·৯	২০·০	১৮৩·১	২০·৪
১৯৩৮-৩৯	১৯·৭	১০৪·২	২০·৮৪	১৪৯·৪	২১·৪	১৯৪·৯	২১·৭
১৯৩৯-৪০	২৩·২	১১১·৭	২২·৩৪	১৫৯·২	২২·৭	২২০·৪	২৪·৫
১৯৪০-৪১	২১·৫	১১৯·৪	২৩·৮৮	১৬২·৭	২৩·১	২৫৪·৮	২৮·৩
১৯৪১-৪২	২৬·৮	১৪২·৫	২৮·৫০	২১৫·০	৩০·৭	২৯৬·৭	৩৩·০
১৯৪২-৪৩	২৮·২	১৭২·১	৩৬·৪২	২৫৬·৫	৩৬·৬	৩৪৩·৪	৩৮·১
১৯৪৩-৪৪	৪২·৮	২১১·৮	৪২·৩৬	৩০০·৫	৪২·৯		
১৯৪৪-৪৫	৫২·৮	২৫২·৭	৫০·৪৪				
১৯৪৫-৪৬	৬১·২০						
১৯৪৬-৪৭	৬৭·২						

$$\frac{১৪·৩+২০·৯+২৯·৮+২০·২+২০·৬}{৫} = \frac{১০৫·৮}{৫} = ২১·১৬$$

চলিষ্ণুগড়ের (মুভিং অ্যাভারেজ) কাজ হ'ল কাল-শ্রেণীর ওঠা-নামা অপসারণ করে শুধু শ্রেণীর 'সাধারণ ঝোঁক' নির্দ্দেশ করা। সুতরাং, যে কাল-শ্রেণীতে ওঠা-নামা নেই, শুধু সাধারণ ঝোঁকই দেখা যায়, সেই শ্রেণীতে যদি চলিষ্ণু গড় প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা যায়, তাহ'লে মূলশ্রেণীর পুনরাবৃত্তিই দেখ্তে পাব। আবার, যে কাল-শ্রেণীর কোন সাধারণ ঝোঁক নেই, শুধু ওঠা-নামাই (fluctuations) আছে, সেখানে এই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করলে শুধু এমন একটা শ্রেণী পাব যাতে আছে শুধু শূন্য। প্রথমে, ওঠা-নামা নেই, এমন্ শ্রেণীর কথাই ধরা যাক, অর্থাৎ, যে শ্রেণীকে গ্রাফে প্রকাশ করলে একটা সরলরেখা পাই তেমন শ্রেণীর কথাই ধরা যাক। $y=a+bx$ সমীকরণ হ'ল সরলরেখার প্রতীক। এখানে $a=২$ ও $b=৩$ ধরে নিম্নলিখিত শ্রেণী পাই—

টেবল্ নং ৩৯

বর্ষ	শ্রেণী $(a+bx)$	পঞ্চবর্ষ যোগ	পঞ্চবর্ষ চলিষ্ণু গড়	সপ্তবর্ষ যোগ	সপ্তবর্ষ চঃ গঃ	অষ্টবর্ষ যোগ	অষ্টবর্ষ চঃ গঃ
১	৫						
২	৮						
৩	১১	৫৫	১১				
৪	১৪	৭০	১৪	৯৮	১৪		
						১২৪	১৫.৫
৫	১৭	৮৫	১৭	১১৯	১৭		
						১৪৮	১৮.৫
৬	২০	১০০	২০	১৪০	২০		
						১৭২	২১.৫
৭	২৩	১১৫	২৩	১৬১	২৩		
৮	২৬	১৩০	২৬				
৯	২৯						
১০	৩২						

এই শ্রেণীতে দেখছি যে, যে-রকম ভাবেই শ্রেণীবদ্ধ করে গড় নিই না কেন, ফলে দেখ্ছি যে, গড় প্রতি ক্ষেত্রেই মূল সংখ্যার সঙ্গে মিলে যাচ্ছে। আর, যদি জোড় সংখ্যা নিয়ে গড় ধরি তাহলে 'ঝোঁকের মান' থাকে (ট্রেণ্ড ভ্যালু) সময় অন্তরের মাঝামাঝি। যেমন, ৮ বৎসরের চলিষ্ণু গড় নির্দ্দেশ করছে ৪.৫, ৫.৫, ৬.৫, সময়ের ঝোঁক-মান। এই উদাহরণ থেকে সিদ্ধান্ত করতে পারি যে—

যে কাল-শ্রেণীকে (টাইম সিরিজ) গ্রাফে প্রকাশ করলে একটা সরল-রেখা পাওয়া যায়, সেই কাল-শ্রেণী থেকে চলিষ্ণু গড় নিয়ে নতুন শ্রেণী তৈরী করলে মূল-শ্রেণীর পুনরাবৃত্তি পাই, বা, এমন একটা শ্রেণী পাই যেটা থেকে বিন্দু সংস্থাপন (প্লট) করলে বিন্দুগুলি পড়বে মূলরেখার উপরে।

কিন্তু, যদি সরল রেখা না হয়ে বক্ররেখা ঝোঁক নির্দ্দেশ করে, তাহ'লে চলিষ্ণু গড় নেওয়ার ফলে শ্রেণীটি হুবহু পুনরাবৃত্তি হয় না। একটা উদাহরণ নেওয়া যাক্। কার্ভ দুরকমের হতে পারে—কন্‌কেভ্ ও কন্‌ভেক্স্। প্রথমে কন্‌কেভ্ কার্ভের কথাই ধরা যাক। $y = x^2$ সমীকরণ এই ধরণের কার্ভের প্রতীক। কন্‌কেভ্ কার্ভ যে-শ্রেণী নির্দ্দেশ করে, ধরা যাক, তার সঙ্গে আছে পাঁচবর্ষব্যাপী এক চক্রক্রম (সাইক্লিক্যাল ভ্যালু)। চলিষ্ণু গড় নেওয়ার ফলে চক্রক্রমের প্রভাব যদি সম্পূর্ণভাবে শ্রেণীর উপর থেকে অপসারণ করা যায়, তা'হলে, সমীকরণের মানের সঙ্গে চক্রক্রমের গড় যোগ করলে পাব শ্রেণীর 'ঝোঁক-মান' ("ট্রেণ্ড্ ভ্যালু")

$$\text{চক্রক্রমের গড়} = \frac{৩+৪+২+৫+৮}{৫} = ৪\text{'}৪$$

টেবল্ নং ৪০

সময়-অন্তর (১)	x (২)	x^2 (৩)	চক্রক্রম (৪)	যুক্ত (৩+৪) (৫)	পঞ্চবর্ষের চলিষ্ণুগড় (৬)	প্রকৃত ঝোঁক মান (x^2 + ৪'৪) (৭)
১	০	০	৪	৪		
২	১	১	২	৩		
৩	২	৪	৫	৯	১০'৪	৮'৪
৪	৩	৯	৮	১৭	১৫'৪	১৩'৪
৫	৪	১৬	৩	১৯	২২'৪	২০'৪
৬	৫	২৫	৪	২৯	৩১'৪	২৯'৪
৭	৬	৩৬	২	৩৮	৪২'৪	৪০'৪
৮	৭	৪৯	৫	৫৪	৫৫'৪	৫৩'৪
৯	৮	৬৪	৮	৭২	৭০'৪	৬৮'৪
১০	৯	৮১	৩	৮৪	৮৭'৪	৮৫'৪
১১	১০	১০০	৪	১০৪	১০৬'৪	১০৪'৪
১২	১১	১২১	২	১২৩	১২৭'৪	১২৫'৪
১৩	১২	১৪৪	৫	১৪৯		
১৪	১৩	১৬৯	৮	১৭৭		

এই টেব্‌লে দেখছি যে চলিষ্ণু গড় নিয়ে যে শ্রেণী তৈরী হ'ল তা মূল শ্রেণীর সঙ্গে এক নয়; এখানে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই চলিষ্ণু গড় 'প্রকৃত ঝোঁক মানের' (ট্রু ট্রেন্ড্ ভ্যালু) চেয়ে অধিক। নীচে আর একটা টেব্‌ল্ দিলুম। কন্‌ভেক্স্ ট্রেণ্ডের বা ঝোঁকের সঙ্গে চক্রক্রম মিলিয়ে শ্রেণীটি তৈরী হয়েছে। $y=\sqrt{x}$ সমীকরণ কন্‌ভেক্স্ কার্ভের প্রতীক।

টেবল্ নং ৪১

সময় অন্তর (১)	X (২)	$\sqrt{X}$ (৩)	চক্রক্রম (৪)	স্তম্ভ (৩)+(৪) (৫)	৫-শ্রেণীর চঃ গড়	প্রকৃত ঝোঁক ($\sqrt{X}$+৪·৪)
১	০	০	৪	৪·০০		
২	১	১·০০	২	৩·০০		
৩	২	১·৪১	৫	৬·৪১	৫·৬৩	৫·৮১
৪	৩	১·৭৩	৮	৯·৭৩	৬·০৮	৬·১৩
৫	৪	২·০০	৩	৫·০০	৬·৩৭	৬·৪০
৬	৫	২·২৪	৪	৬·২৪	৬·৬১	৬·৬৪
৭	৬	২·৪৫	২	৪·৪৫	৬·৮৩	৬·৮৫
৮	৭	২·৬৫	৫	৭·৬৫	৭·০৩	৬·০৫
৯	৮	২·৮৩	৮	১০·৮৩	৭·২২	৭·২৩
১০	৯	৩·০০	৩	৬·০০	৭·৩৯	৭·৪০
১১	১০	৩·১৬	৪	৭·১৬	৭·৫৫	৭·৫৬
১২	১১	৩·৩২	২	৫·৩২	৭·৭১	৭·৭২
১৩	১২	৩·৪৬	৫	৮·৪৬		
১৪	১৩	৩·৬১	৮	১১·৬১		

এখানে দেখ্‌ছি, চলিষ্ণুগড় সবসময়েই প্রকৃত ঝোঁকের চেয়ে কমই থেকে যাচ্ছে।

উপরের দুটী টেব্‌লে যে উদাহরণ দিয়েছি তা থেকে বলা যায় যে—

কোন কাল-শ্রেণীকে গ্রাফে প্রকাশ কর্‌তে গেলে যদি কার্ভের রূপ নেয়, তা'হলে সেই শ্রেণী অবলম্বন করে চলিষ্ণুগড় নিয়ে কার্ভ আঁকলে দেখা যাবে যে, সেই কার্ভটী মূল কার্ভ থেকে পৃথক্। মূল কার্ভটী যদি অনুভূমিক অক্ষরেখার তুলনায় কন্‌ভেক্স্ হয়, তা'হলে চলিষ্ণুগড় কার্ভটী থাকবে মূল কার্ভের উপর দিকে; আর মূল কার্ভ যদি অনুভূমিক অক্ষরেখার তুলনায় কন্‌কেভ্ হয়, তা'হলে চলিষ্ণুগড়

কার্ভ থাকবে মূল কার্ভের নীচের দিকে। চলিষ্ণুগড় নেওয়ার ফলে মূল কার্ভের বক্রতা কমিয়ে আনা হয়। কার্ভের যে অংশের বক্রতা সবচেয়ে কম, চলিষ্ণুগড় কার্ভ সেই অংশে থাকবে সবচেয়ে নিকটে।

এবার দেখা যাক, চক্রক্রমের উপর চলিষ্ণুগড় প্রয়োগ করলে কি ফল পাওয়া যায়। ৩, ৫, ও ৭ শ্রেণীর গড় নিয়ে চলিষ্ণুগড় তৈরী করে নীচের তালিকায় দেখান হয়েছে। মূলশ্রেণীতে দেখছি যে ৫ বছর অন্তর-অন্তর শ্রেণীটা নিয়মিতভাবে ওঠা-নামা করেছে।

টেবল্ নং ৭২

সময় অন্তর	শ্রেণী	৩-শ্রেণী যোগফল	৩-শ্রেণী চলিষ্ণুগড়	৫-শ্রেণী যোগ	৫-শ্রেণী চঃ গঃ	৭-শ্রেণী যোগ	৭-শ্রেণী চঃ গঃ
১	৪						
২	২	১১	৩·৭				
৩	৫	১৫	৫·০	২২	৪·৪		
৪	৮	১৬	৫·৩	২২	৪·৪	২৮	৪·০
৫	৩	১৫	৫·০	২২	৪·৪	২৯	৪·১
৬	৪	৯	৩·০	২২	৪·৪	৩৫	৫·০
৭	২	১১	৩·৭	২২	৪·৪	৩৩	৪·৮
৮	৫	১৫	৫·০	২২	৪·৪	২৯	৪·১
৯	৮	১৬	৫·৩	২২	৪·৪	২৮	৪·০
১০	৩	১৫	৫·০	২২	৪·৪	২৯	৪·১
১১	৪	৯	৩·০	২২	৪·৪	৩৫	৫·০
১২	২	১১	৩·৭	২২	৪·৪	৩৩	৪·৮
১৩	৫	১৫	৫·০	২২	৪·৪	২৭	৩·৯
১৪	৮	১৬	৫·৩				
১৫	৩	১৫	৫·০				
১৬	৪						

পাঁচটা শ্রেণীকে নিয়ে যে চলিষ্ণুগড় তৈরী হয়েছে, তাতে দেখছি যে ওঠা-নামা অপসৃত হয়েছে। কিন্তু ৩-শ্রেণী নিয়ে যে চলিষ্ণুগড় (মুভিং অ্যাভারেজ) শ্রেণী পাওয়া গেছে তাতে ওঠা-নামার চিহ্ন এখনও বর্ত্তমান যদিও তার পরিমাণ কিছু কমে এসেছে। এই উদাহরণ দেখে একটা সিদ্ধান্ত করা যায়, সেটা এই—

যে-ক'বছর নিয়ে চক্র (সাইক্ল) সেই ক'বছরের শ্রেণী নিয়ে চলিষ্ণুগড় তৈরী করলে ওঠা-নামাকে সম্পূর্ণভাবে সরিয়ে ফেলা (এলিমিনেট) যায় ; তার কম বা বেশী শ্রেণী নিয়ে চলিষ্ণুগড় ধরলে ওঠা-নামার বহরটা কিছু পরিমাণে কমে বটে, কিন্তু, সম্পূর্ণভাবে অপসারণ করা যায় না। যে ক'বছর নিয়ে চক্র সেই ক'বছরকে যদি n বলা যায়, তা'হলে বলতে পারি যে, চলিষ্ণুগড় নিয়ে ওঠা-নামা সরিয়ে ফেলতে চাইলে চলিষ্ণুগড় নিতে হবে n শ্রেণীর অথবা n-এর গুণিতক যে-কোন শ্রেণীর।

এবার দেখা যাক যে-শ্রেণী নিয়মহীন ভাবে ওঠা-নামা করে তার উপর চলিষ্ণুগড় প্রণালী প্রয়োগে ফল কি।

টেবল্ নং ৪৩

সময় অন্তর	শ্রেণী	৫-শ্রেণী যোগফল	৫-শ্রেণী চলিষ্ণুগড়	৯-শ্রেণী যোগফল	৯-শ্রেণী চলিষ্ণুগড়
১	৮				
২	১০				
৩	১১	৪৯	৯'৮		
৪	১০	৫০	১০		
৫	১০	৪৯	৯'৮	৮৫	৯'৪
৬	৯	৪৯	৯'৮	৮৬	৯'৫
৭	৯	৪৬	৯'২	৮৭	৯'৬
৮	১১	৪৫	৯	৮৯	৯'৮
৯	৭	৪৭	৯'৪	৮৮	৯'৭
১০	৯	৫১	১০'২	৮৮	৯'৭
১১	১১	৪৯	৯'৮	৮৮	৯'৭
১২	১৩	৫২	১০'৪		
১৩	৯	৫২	১০'৪		
১৪	১০				
১৫	৯				

দেখা যাচ্ছে যে গড় নেওয়ার ফলে ওঠা-নামার পরিমাণটা কমে এসেছে বটে, কিন্তু সম্পূর্ণভাবে অপসৃত হয় নি। ৯-শ্রেণী নিয়ে যে চলিষ্ণুগড় করা হয়েছে তাতে পাঁচ শ্রেণী নিয়ে তৈরী চলিষ্ণুগড়ের চেয়ে ওঠা-নামার মাত্রা কম ; অর্থাৎ, বলা যায় যে, এরূপ ক্ষেত্রে যত অধিক সংখ্যক শ্রেণী নিয়ে গড়

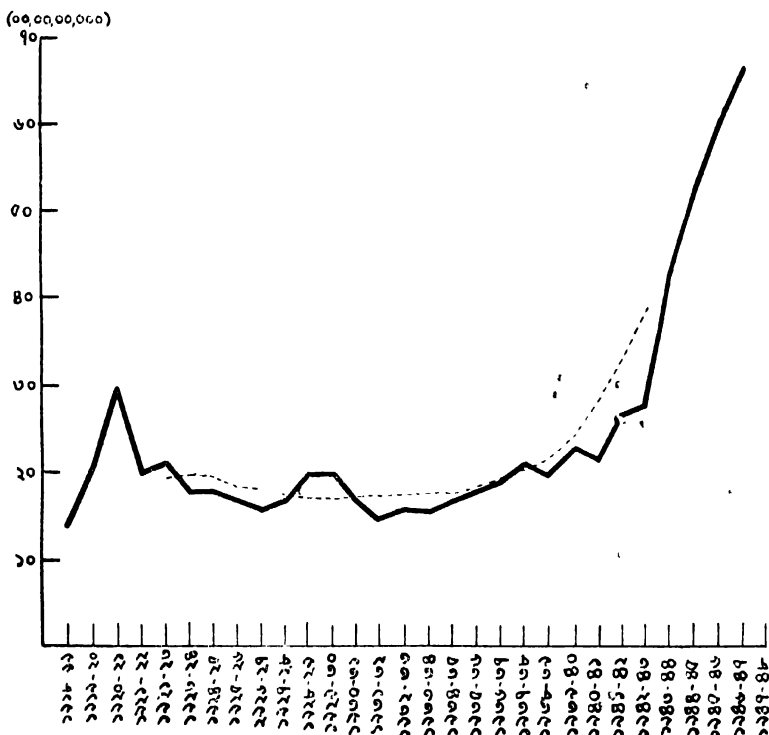
ধরা হবে ওঠা-নামার মাত্রা তত কম হয়ে আসার সম্ভাবনা; তবে কোন ক্ষেত্রেই ওঠা-নামার পরিমাণ সম্পূর্ণভাবে বর্জ্জন করা যাবে না। এ পর্য্যন্ত যা আলোচনা করা হয়েছে তাকে সংক্ষেপে এইভাবে বলা যায়—

ঝোঁক	রৈখিক	চলিষ্ণু গড়ে ঝোঁক অবিকল পুনরাবৃত্তি হয়।
	কার্ভড্	চলিষ্ণু গড়ের কার্ভে বক্রতা কমে আসে; যত অধিক সংখ্যক শ্রেণী নিয়ে চলিষ্ণু গড় হিসাব করা হয় ততই মূল থেকে সেটা দূরে সরে যেতে থাকে।
ওঠা-নামা	নিয়মিত	যে ক'বছর নিয়ে চক্র, সেই ক'টি শ্রেণী নিয়ে চলিষ্ণু গড় হিসাব করলে, ওঠা-নামা সম্পূর্ণভাবে অপসৃত হয়। অন্য যে-কোন ভাবে গড় নেওয়া হোক্-না-কেন তা'তে ওঠা-নামার মাত্রাই শুধু কমে আসে।
	নিয়মহীন	এ সব ক্ষেত্রে ওঠা-নামা সম্পূর্ণভাবে বর্জ্জন করা যায় না, তবে মাত্রা কমিয়ে আনা যায়। গড়ে, যত অধিক সংখ্যক শ্রেণী নেওয়া যায়, ওঠা-নামার মাত্রা তত কমে আসে।

কিন্তু কার্য্যক্ষেত্রে এই নিয়ম ধরে কাজ করতে হলে মুস্কিলে পড়্তে হয়। গড় নির্ণয় করার সময় বহু-সংখ্যক শ্রেণী নিলে নিয়মহীন ওঠা-নামা অপসারণের সুবিধা হ'লেও, নিয়মিত ওঠা-নামা মারা বা ঝোঁক ঠিকমত দেখানো সম্ভব হয় না। পক্ষান্তরে, অতি অল্প-সংখ্যক শ্রেণী নিয়ে গড় হিসাব করলে, নিয়মহীন ওঠা-নামা এড়ান যায় না। কাজেই সঙ্কট উভয়দিকেই। তাই, মাঝ পথ অবলম্বন করাই বিধেয়। নিয়মিত ওঠা-নামা অপসারণ করার জন্য, যে-কটী শ্রেণী নিয়ে চলিষ্ণু গড় হিসাব করা প্রয়োজন হয়, সেই কটী শ্রেণী নিয়েই গড় হিসাব করতে হয়; এতে আশা করা যায় যে, নিয়মহীন ওঠা-নামার মাত্রাও কিছু কম হয়ে আসবে, এবং ঝোঁকও কিছুমাত্র বিকৃত হবে না। তাই যখনই চলিষ্ণু গড় প্রণালীর ব্যবহার করা হয়, তখনই প্রথমে লক্ষ্য করতে হয় যে, যে-শ্রেণী নিয়ে আলোচনা

করা হচ্ছে তাতে পর্য্যায়ক্রম (পিরিয়ডিসিটী) কি। উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক্।

টেবল্ নং ৩৮-শে চেক্ ক্লিয়ারিং সম্বন্ধে যে শ্রেণী দেওয়া হয়েছে তার গ্রাফ্ নীচে দেওয়া হ'ল—

চিত্র নং ৮

ভারতবর্ষে চেক্ ক্লিয়ারিং-এর পরিমাণ

এই গ্রাফ থেকে দেখছি যে ১৯২০-২১, ১৯২৯-৩০, ১৯৩৭-৩৮, ১৯৪৬-৪৭-র মাথায় রয়েছে কার্ভের চূড়া; এ থেকে বলা যায় যে, প্রায় ৯ বছর অন্তর পর্য্যায়ক্রমে কার্ভ উঠেছে-নেমেছে। সুতরাং, ৯-বছরের চলিষ্ণু গড় ধরে কার্ভ আঁকলে ঝোঁকের পরিচয় অনেকখানি পাওয়া যাবে। চিত্র নং ৮ দেখ। শ্রেণী ও ঝোঁকের অন্তরই নির্দ্দেশ করবে ওঠা-নামার মাত্রা (টেঃ নং ৪৪)।

টেবল্ নং ৪৪

বর্ষ	শ্রেণী	ঝোঁক	ওঠা-নামা
১৯১৮-১৯	১৪·৩		
১৯১৯-২০	২০·৯		
১৯২০-২১	২৯·৮		
১৯২১-২২	২০·২		
১৯২২-২৩	২০·৬	১৯·৩	+১·৩
১৯২৩-২৪	১৮·০	১৯·৭	−১·৭
১৯২৪-২৫	১৮·১	১৯·৬	−১·৫
১৯২৫-২৬	১৬·৯	১৮·৫	−১·৬
১৯২৬-২৭	১৬·১	১৮·২	−২·১
১৯২৭-২৮	১৬·৭	১৭·৫	− ·৮
১৯২৮-২৯	১৯·৮	১৭·৩	+২·৩
১৯২৯-৩০	২০·০	১৭·২	+২·৮
১৯৩০-৩১	১৭·৩	১৭·২	+ ·১
১৯৩১-৩২	১৫·২	১৭·৫	−২·৩
১৯৩২-৩৩	১৬·২	১৭·৮	−১·২
১৯৩৩-৩৪	১৬·৪	১৭·৮	−১·৪
১৯৩৪-৩৫	১৭·৩	১৭·৮	− ·৫
১৯৩৫-৩৬	১৮·৪	১৮·৫	− ·১
১৯৩৬-৩৭	১৯·৩	১৯·২	+ ·১
১৯৩৭-৩৮	২০·৫	২০·৩	+ ·২
১৯৩৮-৩৯	১৯·৭	২১·৬	−১·৯
১৯৩৯-৪০	২৩·২	২৩·৮	− ·৬
১৯৪০-৪১	২১·৫	২৮·৩	−৬·৮
১৯৪১-৪২	২৬·৮	৩৩·০	−৬·২
১৯৪২-৪৩	২৮·২	৩৮·২	=১০·০
১৯৪৩-৪৪	৪২·৮		
১৯৪৪-৪৫	৫২·৮		
১৯৪৫-৪৬	৬১·২		
১৯৪৬-৪৭	৬৭·২		

ঋতুক্রমে ওঠা-নামা (সিস্‌নাল্ ফ্লাকচুয়েশন্):

এ পর্য্যন্ত যা আলোচনা করেছি তাতে কাল-শ্রেণী (টাইম্ সিরিজ) বিশ্লেষণ করে সাধারণ ঝোঁকটা ধরবার চেষ্টা করেছি। পূর্ব্বেই বলেছি, ঐ ধরণের

শ্রেণী পর্য্যায়ক্রমে ওঠা-নামা করে—ঋতু-অনুযায়ী ও চক্রক্রমে। এই ওঠা-নামার প্রভাব ব্যবসা-ব্যণিজ্যের উপর কম নয়। সুতরাং, এই ধরণের ওঠা-নামার বহরটা নিরূপণ করার চেষ্টা করা যাক। ঋতু-অনুযায়ী ওঠা-নামার উদাহরণ নীচে দিলুম। পণ্যের পাইকারী দর, মাসের-পর-মাস চাহিদা-যোগান অনুযায়ী ওঠা-নামা করে। ঝোঁক নির্ণয় করবার জন্য এই শ্রেণীতে ১২ মাসের চলিষ্ণু গড় প্রয়োগ করা হয়েছে। ঝোঁক জানলে ওঠা-নামার বহরও জানা যায়, এবং ওঠানামার মাত্রা বিশ্লেষণ করে পাওয়া যায় ঋতুকালীন ওঠা-নামা।

টেবল্ নং ৪৫

পাইকারী দরের সূচক সংখ্যা

বেস্ ১৯৩৯ (জাঃ-জুঃ) = ১০০

বর্ষ	মাস	সূচক	১২-শ্রেণী যোগ	জোড়া-জোড়া যোগ	২৪ দিয়ে ভাগ (ঝোঁক)	ওঠা-নামার মাত্রা
১৯৪৪	জানুয়ারী	৩০১				
	ফেব্রুয়ারী	৩০৪				
	মার্চ্চ	৩০২				
	এপ্রিল	৩০১				
	মে	২৯৬				
	জুন	৩০৪	৩৬২৭	৭২৫৬	৩০২·৩	+১·৭
	জুলাই	৩০৩	৩৬২৯	৭২৫৭	৩০২·৩	+ ·৭
	আগষ্ট	৩০২	৩৬২৮	৭২৬৪	৩০২·৬	− ·৬
	সেপ্টেম্বর	৩০৫	৩৬৩৬	৭২৭১	৩০২·৯	+২·১
	অক্টোবর	৩০১	৩৬৩৫	৭২৭১	৩০২·৯	−১·৯
	নভেম্বর	৩০৩	৩৬৩৬	৭২৫৮	৩০২·৪	+ ·৬
	ডিসেম্বর	৩০৫	৩৬২২	৭২২৫	৩০১·৪	+ ·৪
১৯৪৫	জানুয়ারী	৩০৩	৩৬০৩	৭১৯০	২৯৯·৫	+৩·৫
	ফেব্রুয়ারী	৩০৩	৩৫৮৭	৭১৫১	২৯৭·৯	+৫·১
	মার্চ্চ	৩১০	৩৫৬৪	৭১১০	২৯৬·২	+৩·৮
	এপ্রিল	৩০০	৩৫৪৬	৭০৬৯	২৯৪·০	+৫·৫
	মে	২৯৭	৩৫২৩	৭০২৭	২৯৫·৭	+৫·০
	জুন	২৯০	৩৫০৪	৬৯৯২	২৯১·৩	−১·৩

বর্ষ	মাস	সূচক	১২-শ্রেণী যোগ	জোড়া-জোড়া যোগ	২৪ দিয়ে ভাগ (ঝোঁক)	ওঠা-নামার মাত্রা
১৯৪৫	জুলাই	২৮৪	৩৪৮৮	৬৯৭৬	২৯০·৬	—৬·৬
	আগষ্ট	২৮৬	৩৪৮৮	৬৯৭২	২৯০·৫	—৪·৫
	সেপ্টেম্বর	২৮২	৩৪৮৪	৬৯৭৬	২৯০·৬	—৮·৬
	অক্টোবর	২৮৩	৩৪৯২	৭০০৪	২৯১·৮	—৮·৮
	নভেম্বর	২৮০	৩৫১২	৭০৬১	২৯৪·২	—১৪·২
	ডিসেম্বর	২৮৬	৩৫৪৯	৭১৪৫	২৯৭·৭	—১১·৭
১৯৪৭	জানুয়ারী	২৮৭	৩৫৯৬	৭২৩৯	৩০১·২	—১৪·২
	ফেব্রুয়ারী	৩০৩	৩৬৪৩	৭৩৪২	৩০৪·৯	—১·৯
	মার্চ্চ	৩০৬	৩৬৯৯	৭৪৬৬	৩১১·৮	—·৫
	এপ্রিল	৩০৮	৩৭৬৭	৭৬১৮	৩১৭·১	—৯·১
	মে	৩১৭	৩৮৫১	৭৭৮৭	৩২৪·৪	—৭·৪
	জুন	৩২৭	৩৯৩৬	৭৯৫২	৩৩১·৩	—৪·৩
	জুলাই	৩৩১	৪০২৬	৮১৩৯	৩৩৮·৭	—৭·৭
	আগষ্ট	৩৩৩	৪১০৫	৮২৭৮	৩৪৪·৯	—১১·৯
	সেপ্টেম্বর	৩৩৮	৪১৭৩	৮৪১৬	৩৫০·৬	—২২·৬
	অক্টোবর	৩৫১	৪২৪৩	৮৫৪৬	৩৫৬·০৮	—৫·০
	নভেম্বর	৩৬৪	৪৩০৩	৮৬৬২	৩৬০·৯	+৩·১
	ডিসেম্বর	৩৭১	৪৩৫৯	৮৭৭৩	৩৬৫·৫	+৫·৫
১৯৪৭	জানুয়ারী	৩৭৭	৪৪১৪	৮৮৮৫	৩৭০·২	+৬·৮
	ফেব্রুয়ারী	৩৮২	৪৪৭১	৮৯৯৫	৩৭৪·৬	+৭·৪
	মার্চ্চ	৩৭৪	৪৫২৪	৯০৮৯	৩৭৮·৭	—৪·৭
	এপ্রিল	৩৭৮	৪৫৬৫	৯১৫৭	৩৮১·৫	—৩·৫
	মে	৩৭৭	৪৫৯২	৯২১৬	৩৮৪·০	—৭
	জুন	৩৮৩	৪৬২৪	৯২৮৯	৩৮৭·০৪	—৪
	জুলাই	৩৮৬	৪৬৬৫	৯৩৭৯	৩৯০·৭	—৪·৭
	আগষ্ট	৩৯০	৪৭১৪	৯৪৮৩	৩৯৫·১	—৫·১
	সেপ্টেম্বর	৩৯১	৪৭৬৯	৯৫৯৬	৩৯৯·৮	—৮·৮
	অক্টোবর	৩৯২	৪৮২৭	৯৭৩৩	৪০৫·৫	—১৩·৫
	নভেম্বর	৩৯৬	৪৯০৬	৯৯০০	৪১২·৫	—২১·৫
	ডিসেম্বর	৪০৩	৪৯৯৪	১০০৮০	৪২০·০	—১৭
১৯৪৮	জানুয়ারী	৪১৮	৫০৮৬	১০২৫৩	৪২৭·২	—৯·২
	ফেব্রুয়ারী	৪৩১	৫১৬৭	১০৪১৪	৪৩৩·৯	—২·৯
	মার্চ্চ	৪২৯	৫২৪৭	১০৫৭২	৪৪০·৫	—১১·৫

বর্ষ	মাস	সূচক	১২-শ্রেণী যোগ	জোড়া-জোড়া যোগ	২৪ দিয়ে ভাগ (ঝোঁক)	ওঠা-নামার মাত্রা
১৯৪৮	এপ্রিল	৪৩৬	৫৩২৫	১০৭৩০	৪৪৭·০	—১১
	মে	৪৫৬	৫৪০৫	১০৮৭৯	৪৫৩·২	+২·৮
	জুন	৪৭১	৫৪৭৪			
	জুলাই	৪৭৮				
	আগষ্ট	৪৭১				
	সেপ্টেম্বর	৪৭১				
	অক্টোবর	৪৭০				
	নভেম্বর	৪৭১				
	ডিসেম্বর	৪৭২				

এখানে টেব্‌লের শেষ স্তম্ভে যে ওঠা-নামার মাত্রা দেখান হয়েছে, তাতে আছে নিয়মিত ও নিয়মহীন (রেগুলার ও ইরেগুলার) ভেদ দুইই ; নিয়মিত ওঠা-নামার পর্য্যায় হচ্ছে ১২। ওঠা-নামার মাত্রাগুলি এইভাবে সাজান গেল—

টেবল্ নং ৪৬

মাস (১)	১৯৪৪ (২)	১৯৪৫ (৩)	১৯৪৬ (৪)	১৯৪৭ (৫)	১৯৪৮ (৬)	মোট (৭)	গড় (৮)
জানুয়ারী		+৩·৫	−১৪·২	+৬·৮	−৯·২	−১৩·১	−৩·৩
ফেব্রুয়ারী		+৫·১	−১·৯	+৭·৪	−২·৯	+৭·৭	+১·৯
মার্চ্চ		+৩·৮	−৫	−৪·৭	−১১·৫	−১৭·৪	−৪·৪
এপ্রিল		+৫·৫	−৯·১	−৩·৫	−১·১	−১৮·১	−৪·৫
মে		+৫·০	−৭·৪	−৭	+২·৮	−৬·৬	−১·৭
জুন	+১·৭	−১·৩	−৪·৩	−৪		−৭·৯	−২·০
জুলাই	+ ·৭	−৬·৬	−৭·৭	−৪·৭		−১৮·৩	−৪·৬
আগষ্ট	− ·৬	−৪·৫	−১১·৯	−৫·১		−২২·১	−৫·৫
সেপ্টেম্বর	+২·১	−৮·৬	−২২·৬	−৮·৮		−৩৭·৯	−৯·৫
অক্টোবর	−১·৯	−৮·৮	−৫·০	−১৩·৫		−২৯·২	−৭·৩
নভেম্বর	+ ·৬	−১৪·২	+৩·১	−১১·৫		−৩২·০	−৮·০
ডিসেম্বর	+ ·৪	−১১·৭	+৫·৫	−১·৭		−১৯·২	−৫·০

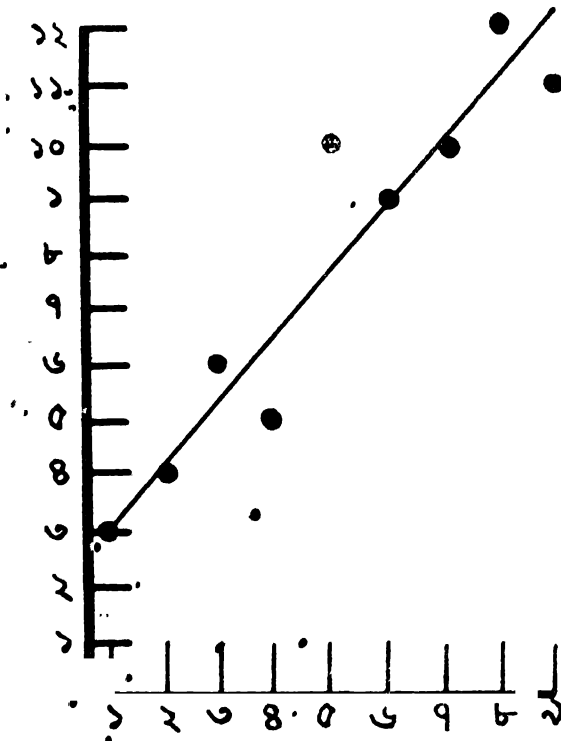
(৮) নং স্তম্ভে ঋতু-অনুযায়ী নিয়মিত ওঠা-নামার হিসাব পাচ্ছি। প্রত্যেক জানুয়ারী মাসের যে সংখ্যা পাচ্ছি সেগুলি নিয়মিত ও নিয়মহীন ওঠা-নামার ফল। এখানে আমরা ধরে নিচ্ছি যে, বহু বৎসরের হিসাব নিলে দেখা যাবে যে, নিয়মহীন ওঠা-নামার প্রভাব ক্রমশঃ কমে এসে শূন্যে মিলিয়ে যাবে; অর্থাৎ, কোন বৎসর হয়ত ওঠা-নামার মাত্রা বাড়িয়ে দেবে, আবার কোন বৎসর বা কমিয়ে দেবে; তাই, বিভিন্ন বৎসরের ওঠা-নামার মাত্রা যোগ করলে একটী অপরটীর সঙ্গে কাটাকাটি হয়ে যাবে। অতএব, যত বেশী বছরের হিসাব নেওয়া যাবে, তত নিয়মহীন ওঠা-নামার মাত্রা শূন্যের দিকে এগিয়ে আসবে। সুতরাং, কয়েক বৎসরের জানুয়ারী মাসের ওঠা-নামার মাত্রার গড়-কে একমাত্র নিয়মিত ওঠা-নামার প্রতীক বলেই ধরে নিতে পারি। অন্যান্য মাস সম্বন্ধেও ঐ একই কথা। যে উদাহরণ নিয়েছি, তাতে মাত্র ৪ বৎসরের হিসাব নিয়েছি। কিন্তু, যত বেশী বৎসর নেওয়া যাবে তত বেশী ভাল ফল পাওয়া যাবে।

টেবল্ নং ৪৭

বর্ষ	মাস	ঝোঁক	ঋতুক্রমে ওঠা-নামা	নিয়মহীন ওঠা-নামা	মূল শ্রেণী
১৯৪৪	জুঃ	৩০২'৩	−২'০	+৩'৭	৩০৪
	জু	৩০২'৩	−৪.৬	+৫'৩	৩০৩
	অ	৩০২'৬	−৫'৫	+৪'৯	৩০২
	সেঃ	৩০২'৯	−৯'৫	+১১'৬	৩০৫
	অঃ	৩০২'৯	−৭'৩	+৫'৪	৩০১
	নঃ	৩০২'৪	−৮'০	+৮'৬	৩০৩
	ডিঃ	৩০১'০	−৫'০	+৯'০	৩০৫
১৯৪৫	জা	২৯৯'৫	−৩'৩	+৬'৮	৩০৩
	ফেঃ	২৯৭'৯	+১'৯	+৩'২	৩০৩
	মাঃ	২৯৬'২	−৪'৪	+১৮'২	৩১০
	এঃ	২৯৪'৫	−৪'৫	+১০	৩০০
	মেঃ	২৯২'৭	−১'৭	+৬	২৯৭
	জুঃ	২৯১'৩	−২'০	+'৭	২৯০
	জুঃ	২৯০'৬	−৪'৬	−২	২৮৪
	অঃ	২৯০'৫	−৫'৫	+১	২৮৬

বর্ষ	মাস	ঝোঁক	ঋতুক্রমে ওঠা-নামা	নিয়মহীন ওঠা-নামা	মূল শ্রেণী
১৯৪৫	সেঃ	২৯০'৬	—৯'৫	+'৯	২৮২
	অঃ	২৯১'৮	—৭'৩	—১'৫	২৮৩
	নঃ	২৯৪'২	—৮'০	—৬'২	২৮০
	ডিঃ	২৯৭'৭	—৫'০	—৬'৭	২৮৬
১৯৪৬	জাঃ	৩০১'২	—৩'৩	—১০'৯	২৮৭
	ফেঃ	৩০৪'৯	+১'৯	—৩'৮	৩০৩
	মাঃ	৩১১'০	—৪'৪	—'৬	৩০৬
	এঃ	৩১৭'১	—৪'৫	—৪'৬	৩০৮
	মেঃ	৩২৪'৪	—১'৭	—৫.৭	৩১৭
	জুঃ	৩৩১'৩	—২'০	—২'৩	৩২৭
	জুঃ	৩৩৮'৭	—৪'৬	—৩'১	৩৩১
	অঃ	৩৪৪'৯	—৫'৫	—৬'৪	৩৩৩
	সেঃ	৩৫০'৬	—৯'৫	—৩'১	৩৩৮
	অঃ	৩৫৬'০	—৭'৩	+২'৩	৩৫১
	নঃ	৩৬০'৯	—৮'০	+১১'১	৩৬৪
	ডিঃ	৩৬৫'৫	—৫'০	+১০'৫	৩৭১
১৯৪৭	জাঃ	৩৭০'২	—৩'৩	+১১'৯	৩৭৭
	ফেঃ	৩৭৪'৬০	+১'৯	+৫'৫	৩৮২
	মাঃ	৩৭৮'৭	—৪'৪	—'৩	৩৭৪
	এঃ	৩৮১'৫	—৪'৫	+১	৩৭৮
	মেঃ	৩৮৪	—১'৭	—৫'৭	৩৭৭
	জুঃ	৩৮৭'০	—২'০	—২'০	৩৮৩
	জুঃ	৩৯০'৭	—৪'৬	—'১	৩৮৬
	অঃ	৩৯৫'১	—৫'৫	+'৪	৩৯০
	সেঃ	৩৯৯'৮	—৯'৫	+.৭	৩৯১
	অঃ	৪০৫'৫	—৭'৩	—৬'২	৩৯২
	নঃ	৪১২'৫	—৮'০	—১৩'৫	৩৯১
	ডিঃ	৪২০	—৫'০	—১২'০	৪০৩
১৯৪৮	জাঃ	৪২৭'২	—৩'৩	—৫'৯	৪১৮
	ফেঃ	৪৩৩'৯	+১'৯	—৪'৮	৪৩১
	মাঃ	৪৪০'৫	—৪'৪	—৭'১	৪২৯
	এঃ	৪৪৭'০	—৪'৫	—৬'৫	৪৩৬
	মেঃ	৪৫৩'২	—১'৭	+৪'৫	৪৫৬

গাণিতিক কার্ভ : (ম্যাথামেটীক্যাল্ কার্ভ)

বহুক্ষেত্রে সাধারণ ঝোঁক নির্দ্দেশ করতে চলিষ্ণু গড়ের উপর নির্ভর না করে গাণিতিক কার্ভের সাহায্য নেওয়া হয়। অর্থনীতি-বিষয়ক সংখ্যাতথ্যে, অনেক সময় দেখা যায় যে, ডেটাগুলির বাড়া-কমার মধ্যে একটা নির্দ্দিষ্ট নিয়ম বর্ত্তমান ; এসব ক্ষেত্রে বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা করতে গাণিতিক কার্ভ বেশ কাজে লাগে। ডেটাগুলিকে গ্রাফে প্রকাশ করতে গেলে যদি দেখা যায় যে, ঝোঁকের প্রতীক হিসাবে সরলরেখা পাওয়া যাচ্ছে, তা'হলে $y=a+bx$ সমীকরণের a ও b ধ্রুবরাশি (constant) দুটির মান নির্ণয় করে ডেটাগুলির ঝোঁক কি তা বুঝিয়ে দেওয়া যায়। একটা সহজ উদাহরণ নেওয়া যাক। গ্রাফ কাগজে নয়টী বিন্দু (১, ৩ ; ২, ৪ ; ৩ ৬ ; ৪, ৫ ;

চিত্র নং ৯

নয়টী বিন্দুর সঙ্গে সরলরেখা খাপ খাওয়ান হয়েছে

৫, ১০; ৬, ৯; ৭, ১০; ৮, ১২; ৯, ১১) সংস্থাপন করা হ'ল (চিত্র নং ৯); আমাদের সমস্যা হচ্ছে এমন একটা সরলরেখা আঁকা যা এই বিন্দুগুলির সঙ্গে খাপ খেয়ে যাবে। এই উদাহরণে পাচ্ছি x-এর ৯টা মান, আর y-এর ৯টা মান। সমীকরণ $y=a+bx$-এ, x ও y-র মান বসিয়ে পাওয়া যায় এই সমীকরণগুলি—

$$৩ = a+১b$$
$$৪ = a+২b$$
$$৬ = a+৩b$$
$$৫ = a+৪b$$
$$১০ = a+৫b$$
$$৯ = a+৬b$$
$$১০ = a+৭b$$
$$১২ = a+৮b$$
$$১১ = a+৯b$$

এই সমীকরণগুলির মধ্যে যে কোণ দু'টী নিয়ে a ও b-র মান নির্ণয় করা যায়; কিন্তু, সেই মান বাকী সমীকরণগুলিতে প্রযোজ্য হ'তে পারে না। সুতরাং, এই ৯টী সমীকরণ থেকে এমন ২টী সমীকরণ স্থির করতে হবে যা থেকে a ও b-র এমন মান পাওয়া যাবে যা হবে সর্ব্বাধিক গ্রহণযোগ্য।

প্রথমে, এই ৯টী সমীকরণের প্রত্যেকটীকে ঐ সমীকরণের a-র গুণক (co-efficient) দিয়ে গুণ করে ৯টী সমীকরণই যোগ কর; দ্বিতীয়তঃ, b-র গুণক দিয়ে সমীকরণগুলিকে গুণ কর এবং ৯টী সমীকরণই যোগ কর। তাহ'লেই পাওয়া যাবে সেই দুটী সমীকরণ যা থেকে a ও b-র সম্ভাব্য মান পাওয়া যাবে।

$৩=a+১b$	$৩=১a+১b$
$৪=a+২b$	$২\times৪=২a+৪b$
$৬=a+৩b$	$৩\times৬=৩a+৯b$
$৫=a+৪b$	$৪\times৫=৪a+১৬b$
$১০=a+৫b$	$৫\times১০=৫a+২৫b$
$৯=a+৬b$	$৬\times৯=৬a+৩৬b$
$১০=a+৭b$	$৭\times১০=৭a+৪৯b$
$১২=a+৮b$	$৮\times১২=৮a+৬৪b$
$১১=a+৯b$	$৯\times১১=৯a+৮১b$
$৭০=৯a+৪৫b$	$৪১৮=৪৫a+২৮৫b$

অতএব, সমীকরণ দুটী হ'ল—

$$\left.\begin{array}{l} ৭০ = ৯a + ৪৫b \\ ৪১৮ = ৪৫a + ২৮৫b \end{array}\right\}$$

$\therefore$ $a =$ ২·১১১ ; $b =$ ১·১৩৩

a ও b-র এই মান বসিয়ে পাই—

$y =$ ২·১১১ + ১·১৩৩ x ; এই রেখাই ৯টী বিন্দুর সঙ্গে সবচেয়ে ভাল খাপ খাবে। a ও b-র মান নির্ণয় করার সূত্র নিম্নরূপ—

যদি, $\Sigma(y) = y$-এর মানগুলির সমষ্টি

$\Sigma(x) = x$-এর মানগুলির সমষ্টি

$\Sigma(xy) = x$ ও y-র মানগুলির গুণফলগুলির সমষ্টি

$\Sigma(x)^2 = x$-এর মানগুলির বর্গর সমষ্টি

$n = x, y$-র যত সংখ্যক মান নেওয়া হয়েছে অর্থাৎ যতগুলি বিন্দুসংস্থাপন করা হয়েছে হয়,

তাহ'লে—

$$\Sigma(y) = na + b\Sigma(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (১)$$

$$\Sigma(xy) = a\Sigma(x) + b\Sigma(x^2) \cdots\cdots (২)$$

এই সূত্রটী কি ভাবে প্রয়োগ করা যায় তা বোঝা সহজ হবে যদি একটা উদাহরণ নেওয়া যায়। পর পৃষ্ঠার টেবলে শেষ স্তম্ভে দেওয়া হয়েছে ঝোঁক-মান। প্রথমে a ও b-র মান নির্ণয় করে নিয়ে, $y = a + bx$ সমীকরণে, x-এর মান বসিয়ে পাওয়া গেছে এই ঝোঁক। ঐ টেবল্ থেকেই পাই—

$n =$ ১৫ ; $\Sigma(x) =$ ১২০ ; $\Sigma(x)^2 =$ ১২৪০ ;

$\Sigma(y) =$ ৪৯০ ; $\Sigma(xy) =$ ৪৪৫৯

a ও b-র মান নির্ণয়ের জন্য উপরে উল্লিখিত (১) ও (২) সমীকরণ থেকে পাই—

$$\left.\begin{array}{l} ৪৯০ = ১৫a + ১২০b \\ ৪৪৫৯ = ১২০a + ১২৪০b \end{array}\right\}$$

অতএব, $a =$ ১৭·৩ ; $b =$ ১·৯

সুতরাং, নির্দিষ্ট সরলরেখাজ্ঞাপক সমীকরণ হবে—

$$y = ১৭·৩ + ১·৯x$$

এই সমীকরণ থেকে ঝোঁক-মান যা পাওয়া যাবে তা দেওয়া হয়েছে টেবল্ নং ৪৮-র (৬)নং স্তম্ভে।

টেবল্ নং ৪৮

পোষ্ট অফিসে আমানতের পরিমাণ—কোটী টাকায়

বর্ষ	(x)	(y) আমানৎ	(xy)	x^2	ঝোঁক
১	২	৩	৪	৫	৬
১৯২৫-২৬	১	১৯	১৯	১	১৯.২
১৯২৬-২৭	২	২০	৪০	৪	২১.১
১৯২৭-২৮	৩	২৩	৪৬	৯	২৩.০
১৯২৮-২৯	৪	২৬	৯৪	১৬	২৪.৯
১৯২৯-৩০	৫	২৬	১৩০	২৫	২৬.৮
১৯৩০-৩১	৬	২৪	১৪৪	৩৬	২৮.৭
১৯৩১-৩২	৭	২৭	১৮৯	৪৯	৩০.৬
১৯৩২-৩৩	৮	৩১	২৪৮	৬৪	৩২.৫
১৯৩৩-৩৪	৯	৩৭	৩৩৩	৮১	৩৪.৪
১৯৩৪-৩৫	১০	৩৯	৩৯০	১০০	৩৬.৩
১৯৩৫-৩৬	১১	৪৬	৫০৬	১২১	৩৮.২
১৯৩৬-৩৭	১২	৪৩	৫১৬	১৪৪	৪০.১
১৯৩৭-৩৮	১৩	৪৩	৫৫৯	১৬৯	৪২.০
১৯৩৮-৩৯	১৪	৪৫	৬৩০	১৯৬	৪৩.৯
১৯৩৯-৪০	১৫	৪১	৬১৫	২২৫	৪৫.৮
মোট	১২০	৪৯০	৪৪৫৯	১২৪০	

অনেক সময় এমন শ্রেণী পাওয়া যায় যাতে সরলরেখা কোনমতেই খাপ খাওয়ান যায় না—বক্ররেখা প্রয়োগ করতে হয়। কার্ভ দিয়ে ঝোঁক বোঝাতে হ'লে $y=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$ সমীকরণ ব্যবহার করা প্রয়োজন হয়। কার্ভের সাহায্যে ঝোঁক নির্দ্দেশ করতে সাধারণতঃ ২ বা ৩ সূচক-বিশিষ্ট সমীকরণই ব্যবহার করা হয়। উপরে যেভাবে a ও b ধ্রুবরাশি (constant) দুটীর মান নির্ণয় করা হয়েছে, এক্ষেত্রে ঐ একই ধরণের প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হয়, তবে এখানে ধ্রুবরাশি (constant) তিনটী—a, b, ও c। সুতরাং, তিনটী সমীকরণের সাহায্য নিতে হয়। নিম্নলিখিত সূত্রে সমীকরণ তিনটী পাওয়া যাবে—

$$\Sigma(y)=na+b\Sigma(x)+c\Sigma(x^2)$$
$$\Sigma(xy)=a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)+c\Sigma(x^3)$$
$$\Sigma(x^2y)=a\Sigma(x^2)+b\Sigma(x^3)+c\Sigma(x^4)$$

একটা সামান্য উদাহরণ নিয়ে বোঝার চেষ্টা করা যাক—

১, ২ ; ২, ৬ ; ৩, ৭ ; ৪, ৮ ; ৫, ১০ ; ৬, ১১ ; ৭, ১১ ; ৮, ১০ ; এবং ৯, ৯ বিন্দুগুলির সঙ্গে খাপ খাইয়ে একটা কার্ভ টানা প্রয়োজন। নীচে দেখ—

টেবল্ নং ৪৯

x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4	ঝোঁক
১	২	২	১	২	১	১	২'৩২
২	৬	১২	৪	২৪	৮	১৬	৫'০৪
৩	৭	২১	৯	৬৩	২৭	৮১	৭'২৩
৪	৮	৩২	১৬	১২৮	৬৪	২৫৬	৮'৮৯
৫	১০	৫০	২৫	২৫০	১২৫	৬২৫	১০'০
৬	১১	৬৬	৩৬	৩৯৬	২১৬	১২৯৬	১০'৫
৭	১১	৭০	৪৯	৫৩৯	৩৪৩	২৪০১	১০'৬
৮	১০	৮০	৬৪	৬৪০	৫১২	৪০৯৬	১০'১
৯	৯	৮১	৮১	৭২৯	৭২৯	৬৫৬১	৯'১৫
৪৫	৭৪	৪২১	২৮৫	২৭৭১	২০১৫	১৫,৩৩৩	

এখানে $n = ৯$

$$\Sigma(x) = ৪৫$$

$$\Sigma(x)^2 = ২৮৫$$

$$\Sigma(x)^3 = ২০২৫$$

$$\Sigma(x)^4 = ১৫,৩৩৩$$

$$\Sigma(y) = ৭৪$$

$$\Sigma(xy) = ৪২১$$

$$\Sigma(x^2y) = ২৭৭১$$

উপরের সমীকরণগুলিতে এই সংখ্যাগুলি বসিয়ে পাই—

$$৭৪ = ৯a + ৪৫b + ২৮৫c$$

$$৪২১ = ৪৫a + ২৮৫b + ২০২৫c$$

$$২৭৭১ = ২৮৫a + ২০২৫b + ১৫৩৩৩c$$

অতএব,

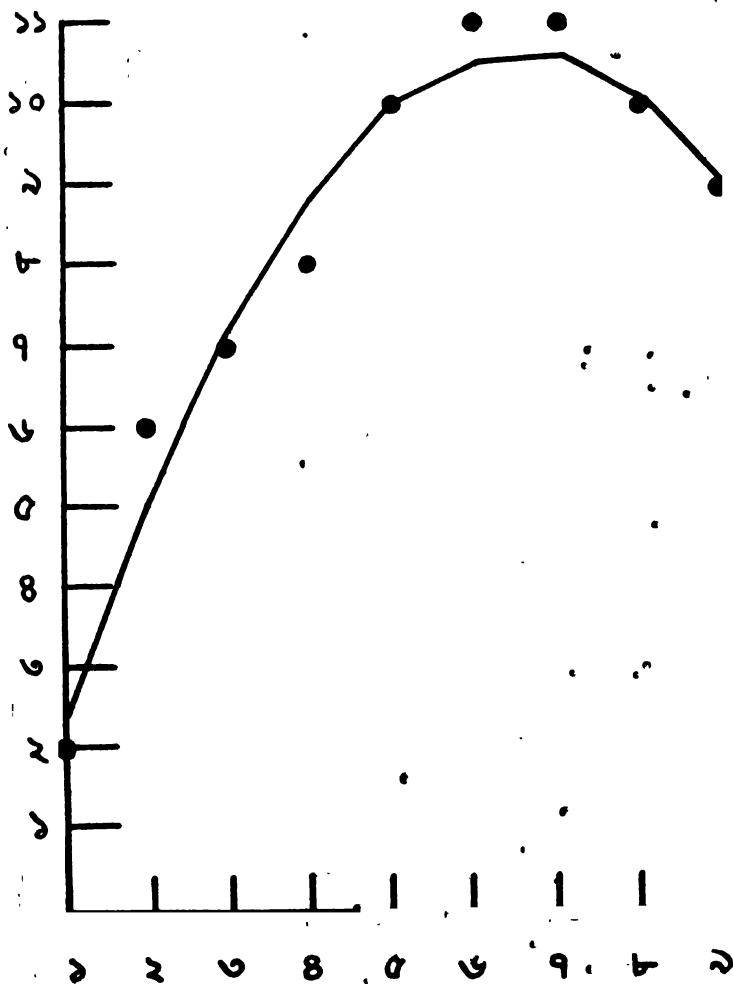
$$a = -'৯২৯$$

$$b = +৩'৫২৩$$

$$c = -'২৬৭$$

সুতরাং, $y = ·৯২৯ + ৩·৫২৩x - ·২৬৭x^2$

এই সমীকরণ থেকে ঝোঁক-মান নির্ণয় করে টেবল্ নং ৪৯-এ শেষ স্তম্ভে দেখান হয়েছে এবং নীচের চিত্রে এঁকে দেখান হয়েছে।

চিত্র নং ১০

নয়টী বিন্দুর সঙ্গে বক্ররেখা খাপ খাওয়ান হয়েছে

সপ্তদশ অধ্যায়

সূচক-সংখ্যা (Index Number) :

সহজ কথায় বলা যায় যে, কোন কাল-শ্রেণীকে (টাইম্ সিরিজ) রিলেটিভ্ সংখ্যায় (অর্থাৎ রেশিওতে) প্রকাশ করলে "সূচক-সংখ্যা" (ইন্‌ডেক্‌স্ নাম্বার) শব্দ ব্যবহার করা হয়। 'রিলেটিভ্' বল্‌লে বোঝায় বর্তমান বৎসর ও স্ট্যাণ্ডার্ড বৎসরের রেশিও; সাধারণতঃ এই রেশিও শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা হয়। ভারতের লবণ-উৎপাদন সম্পর্কীয় সূচক-সংখ্যা এই ভাবের হবে—

টেব্‌ল নং ৫০

ভারতের লবণ-উৎপাদন

১৯২৪-শের উৎপাদন = ১০০

বর্ষ	উৎপাদন (সহস্র মেট্রিক টন)	উৎপাদন রিলেটিভ্
১৯২৪	১৬৫০	১০০
১৯২৫	১৩১৬	৭৯'৭
১৯২৬	১৬৬৫	১০০'৯
১৯২৭	১৬৩৮	৯৯'৩
১৯২৮	১৫৪০	৯৩'৩
১৯২৯	১৭৩৬	১০৫'২

ঠিক এইভাবে যে-কোন পণ্যের দর সম্পর্কেই রিলেটিভ্ বার করা যায়। একটা নির্দিষ্ট বেসের রিলেটিভ্ হিসাবে কাল-শ্রেণীকে ব্যক্ত করা যায় বলে বিভিন্ন সময়ের তথ্য নিয়ে তুলনামূলক আলোচনা করা সম্ভব হয়। তথ্যগুলিকে মূলতঃ যেভাবে পাওয়া যায় তার চেয়ে, এই রিলেটিভ্ আকারে, ঝোঁক বোঝার সুবিধা হয় ও আলোচনাও সহজসাধ্য হয়।

যদিও এই ধরণের রিলেটিভ্ সম্পর্কে সূচক-সংখ্যা শব্দটা এখানে ব্যবহার করেছি, তবু একাধিক শ্রেণীর যুক্তফল বর্ণনা করতেই "সূচক-সংখ্যা"

শব্দ ব্যবহারই বিধেয়। দর, উৎপাদন, ভোগ, মজুরী প্রভৃতি বিষয়ক বিভিন্নশ্রেণীকে সম্মিলিত করে স্থচক-সংখ্যায় প্রকাশ করা সম্ভব। ভারতের কয়লা ও পেট্রোল উৎপাদন নিয়ে স্থচক-সংখ্যা তৈরী করা চলে—

টেবল্ নং ৫১

কয়লা ও পেট্রোলিয়াম উৎপাদন

বর্ষ	কয়লা সহস্র কোঃ টনে	রিলেটিভ্	পেট্রোলিয়াম সহস্র কোঃ টনে	রিলেটিভ্
১৯২৫	২০,৩১০	১০০	১২০১	১০০
১৯২৬	২০,৪৩৬	১০০'৬	১১০০	৯৯'৯
১৯২৭	২১,৪৭৯	১০৫'৭	১১১৮	৯৩'১
১৯২৮	২১,৯০৮	১০৭'৯	১২০০	১০০'০
১৯২৯	২২,৭২১	১১১'৯	১২০১	১০০'০
১৯৩০	২৩,১২৮	১১৩'৯	১২২০	১১৫'৮

কয়লা ও পেট্রোলিয়াম, এই দুইটী পণ্যের রিলেটিভের গড় নিলে পাওয়া যাবে সেই বৎসরের স্থচক। নীচে স্থচক-সংখ্যাটী দেওয়া হল।

টেবল্—নং ৫২

বর্ষ	স্থচক
১৯২৫	১০০
১৯২৬	১০০'২
১৯২৭	৯৯'৪
১৯২৮	১০৩'৯
১৯২৯	১০৫'৯
১৯৩০	১১৪'৮

এখানে প্রত্যেক বছরের ২টী রিলেটিভ্ সংখ্যা নিয়ে ২ দিয়ে ভাগ করে প্রত্যেক শ্রেণীকে সমান গুরুত্ব দিয়ে পেয়েছি উপরের স্থচক-সংখ্যাগুলি। কিন্তু কয়লা ও পেট্রোলিয়ামকে সমান গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে বলে স্থচক সঠিক হয়েছে বলা যায় না; কেননা, লোকের কাছে কয়লা ও

পেট্রোলিয়াম সমান গুরুত্বপূর্ণ নয়। ধর, ১৯২৫ সালে কয়লা ও পেট্রোলিয়াম বেচে মোট পাওয়া গেছে—

কয়লা—১৫,১৫,৫০,০০০৲ টাকা

পেট্রোলিয়াম—৩,৭৮,৯০,০০০৲ টাকা

মোটামুটী ভাবে বলা যায় যে, এ-দুটীর অনুপাত হ'ল ৪ : ১। সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে এই গুরুত্ব প্রয়োগ করা চলে। যেমন—

	রিলেটিভ্	গুরুত্ব	গুরুত্ব
	১৯২৫		রিলেটিভ্
কয়লা	১০০	৪	৪০০
পেট্রোলিয়াম	১০০	১	১০০
	২০০	৫	৫০০
	১৯২৬		
কয়লা	১০০'৬	৪	৪০২'৪
পেট্রোলিয়াম	৯৯'৯	১	৯৯'৯
			৫০২'৩

এই পদ্ধতিতে সূচক-সংখ্যাটী দাঁড়াবে—

টেবল্ নং ৫৩

বর্ষ	সূচক
১৯২৫	১০০
১৯২৬	১০০'৪৬
১৯২৭	১০৩'১৮
১৯২৮	১০৬'৩২
১৯২৯	১০৯'৫২
১৯৩০	১১৪'২৮

গুরুত্ববিশিষ্ট সূচক, সাধারণ সূচক থেকে কিছু পৃথক হবেই; তবে এই সূচকেই শ্রেণীর প্রকৃত পরিচয় পাওয়া যায়। বিভিন্ন শিল্প বা পণ্যের উৎপাদন সম্পর্কে এই যে সূচক—একে বলা হয় 'শিল্পোৎপাদন সূচক-সংখ্যা' তেমনি, পণ্যের দরের মাত্রা ধ'রে নির্দ্ধারণ করা যায় 'দর সূচক-সংখ্যা'।

টেবল্ নং ৫৪

পণ্য	একক	দর ১৯১৩ এপ্রিল	দর ১৯৪৩ এপ্রিল
চা	পাঃ প্রতি	।⁄১০ পাই	॥৫ পাই
তুলা	পাঃ "	॥৩ পাই	২।৯ পাই
সুতো	পাঃ "	৵৪ পাই	১।⁄৬ পাই
ধুতি	জোড়া "	৫৵	১৬॥⁄
পাট	৪০০ পাঃ প্রতি	৫৯৲	৭৫৲
চাউল	মণ প্রতি	৬।৴	২১৲
গম	হন্দর "	৫।⁄	৮৸⁄০
কেরোসিন	১ টিন প্রতি	৪⁄	৫।⁄৩ পাই
বাদাম	৫০০ পাঃ "	৪৩৲	৭৭।⁄
চামড়া	২০ পাঃ "	২২৲	১০॥০

উপরের তালিকায় দেখ্‌ছি যে, ১৯১৩-র সঙ্গে তুলনা করলে ১৯৪৩ সালে বিভিন্ন পণ্যের দর বিভিন্নভাবে বেড়েছে। তা'ছাড়া, এখানে দর ধরা হয়েছে কোথাও পাউণ্ড হিসাবে, কোথাও হন্দর হিসাবে, কোথাও মণ হিসাবে, আবার কোথাও বা টিন হিসাবে। সুতরাং, সমগ্রভাবে এক বৎসরের পণ্যের দরের সঙ্গে আর এক বৎসরের পণ্যের দরের তুলনা করা যায় না। তুলনা কর্‌তে চাইলে সব দরগুলিকে শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা প্রয়োজন ; অর্থাৎ, দর নিয়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করলে সূচক ধরে তুলনা করা চলে। উপরে সূচক তৈরী করার একটা হদিস দিয়েছি ; এবং, তা দেখে মনে হতে পারে যে সূচক নির্ণয় করা সহজ। কিন্তু কার্য্যক্ষেত্রে সূচক নির্ণয় করা সহজ হয় না। প্রকৃতপক্ষে সূচক-সংখ্যা তৈরী কর্‌তে গিয়ে নানা সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। প্রথমতঃ, মুস্কিল হয় বেস্ পিরিয়াড্ স্থির করা নিয়ে ; দ্বিতীয়তঃ, কতটা তথ্য হিসাবের মধ্যে নেওয়া হবে, আর কি-ই বা বর্জ্জন করা হবে, তা স্থির করাও সহজ নয় ; তৃতীয়তঃ, হিসাবের মধ্যে যে-সব বিষয় নেওয়া হয়েছে, তার কোন্‌টাকে কতখানি গুরুত্ব দেওয়া হবে তা স্থির করাও সহজ হয়

না; চতুর্থতঃ, সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে কোন্ পদ্ধতিতে গড় নেওয়া হবে তা স্থির করাও মুস্কিল হয়।

প্রথমে বেস পিরিয়াডের কথা ধরা যাক্। পূর্ব্ববর্ত্তী কোন বিশেষ বর্ষকে নির্দ্দিষ্ট করে নিয়ে, পরবর্ত্তী যে-কোন সময়ের তথ্যগুলিকে সেই বর্ষের তথ্যের সঙ্গে তুলনায় ব্যক্ত করা যায়; অর্থাৎ, একটা নির্দ্দিষ্ট বেস্ ধরে নিয়ে পরবর্ত্তী কালের তথ্যগুলিকে রেশিও হিসাবে প্রকাশ করা হয়। ভারতবর্ষে, যেমন, ১৯৩৯ (জা:-জু:) বর্ষের পাইকারী দরকে বেস্ ধরে পরবর্তী বিভিন্ন বৎসরের দরকে ঐ ১৯৩৯ সনের দরের শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা হয়। কোন বৎসরকে "বেস্" বৎসর বলে ধরার আগে দেখে নেওয়া দরকার যে, সেই সময়টাকে সব দিক থেকেই নর্ম্যাল সময় বলা যায় কিনা। যে সময়টাকে বেস্ হিসাবে ধরা হচ্ছে সে সময়টাতে যদি কোন রকমের বিপর্য্যয় দেখা দিয়ে থাকে—যেমন ধর, মজুর বিক্ষোভ, অর্থ নৈতিক সঙ্কট, বা যুদ্ধ-বিগ্রহ এম্নি একটা-কিছু—তাহ'লে সে সময়টাকে নর্ম্যাল বলা যায় না এবং সেটাকে 'বেস্' ধরাও সুবিধাজনক হয় না। এম্নি একটা সময়কে বেস্ বলে যদি ধরাই হয়, তাহ'লে প্রত্যেক সময়েই জানিয়ে দেওয়া প্রয়োজন যে, বেস্ পিরিয়াড্ ছিল অস্বাভাবিক; কেননা, তা না হ'লে এই বেস্ ধরে যেসব আলোচনা হ'বে তা হ'বে ভ্রমপূর্ণ। যেমন, প্রথম যুদ্ধের পূর্ব্ববর্তী কয়েক বৎসর ছিল বুম্ পিরিয়াড; সুতরাং, যখনই যুদ্ধের পূর্ব্ব বৎসরের সঙ্গে পরবর্তী বৎসরের তুলনা করা হয়েছে, স্মরণ করিয়ে দিতে হয়েছে যে যুদ্ধের পূর্ব্ববর্তী সময়টা ছিল ব্যবসা-বাণিজ্যের তরফ থেকে নেহাৎ সুসময়। এই ধরণের মুস্কিল এড়ানর জন্য মাত্র এক বৎসরের সময়কে বেস্ পিরিয়াড হিসাবে না ধরে, কয়েক বৎসরের গড় ধ'রে, সেই গড়টাকে বেস্ ধরা হয়। "ষ্ট্যাটিস্ট্" পত্রিকায় ১৮৬৭-১৮৭৭ এই কয়েক বৎসরের গড়কে বেস্ ধরে পাইকারী দরের সূচক-সংখ্যা নির্ণয় করা হয়ে থাকে।

এতক্ষণ, স্থির বেসের কথাই বললুম। কোন কোন ক্ষেত্রে মুভিং বেস ব্যবহার করা হয়ে থাকে। বেস্ এখানে স্থির নয়, ক্রমশঃই সরে সরে যায়, তাই বলা হয় মুভিং বেস্। নির্দ্দিষ্ট বেস্ পিরিয়াডের শতকরা হিসাবে পরবর্তী সব তথ্যগুলিকে ব্যক্ত না করে, প্রত্যেক বৎসরের তথ্যগুলিকে পূর্ব্ববর্তী

বৎসরের তথ্যের শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করা হয়। যেমন, বার্ষিক হিসাবের উপর নির্ভর করে যদি সূচক-সংখ্যা তৈরী করা হয়, তাহ'লে, ১৯৪৮ সনের তথ্যকে ১৯৪৭ সনের শতকরা হিসাব ব্যক্ত করা হবে এবং ১৯৪৭ই হবে বেস্; তেমনি, ১৯৪৯ সনের তথ্যকে ব্যক্ত করা হবে ১৯৪৮শের শতকরা হিসাবে এবং তা থেকে যে সূচক-সংখ্যা পাওয়া যাবে তার বেস্ হবে ১৯৪৮। এই পদ্ধতিকে বলা হয় "চেন বেস্ মেথড"; স্বল্প সময়ের ব্যবধানে যে পরিবর্তন দেখা দেয়, তার প্রতি লক্ষ্য দেওয়াও প্রয়োজন হয়। সেরূপ-ক্ষেত্রে 'মুভিং বেস্' ধরে সূচক-সংখ্যা তৈরীই বিধেয়। মুভিং বেস অবলম্বন করে যে সূচক-সংখ্যা তৈরী হয়েছে, তা থেকে আবার নতুন এমন একটা সূচক-সংখ্যা তৈরী করা যায় যার বেস্ থাকবে নির্দিষ্ট। ধর, এই ধরণের সূচক আছে—

১৯৪৭ অবলম্বন করে ১৯৪৮শের সূচক = ১২৫

১৯৪৮ " " ১৯৪৯ " " = ১১০

১৯৪৯ " " ১৯৫০ " " = ১০৫

এ থেকে সহজেই পাওয়া যায়—

১৯৪৭ অবলম্বন করে ১৯৪৯-এর সূচক হবে $= \frac{১২৫}{১০০} \times ১১০ = ১৩৭.৫$

" " ১৯৫০-এর " " $= \frac{১২৫}{১০০} \times \frac{১১০}{১০০} \times ১০৫$

$= ১৪৪.৪$

সুতরাং বলা যায় যে—(বেস্ ১৯৪৭ = ১০০)

বর্ষ	সূচক-সংখ্যা
১৯৪৭	১০০
১৯৪৮	১২৫
১৯৪৯	১৩৭.৫
১৯৫০	১৪৪.৪

দীর্ঘসময়ের ব্যবধানে অনেক সময় শব্দের সংজ্ঞার পরিবর্তন হয়। যেমন, ধর, "ধুতি" শব্দ; ধুতি বললে পাটের ধুতি, তাঁতের ধুতি, গরদের ধুতি প্রভৃতি বোঝায়; কিন্তু ১৯০০ খ্রীষ্টাব্দে ধুতি বলতে হয়ত শুধু তাঁতে বোনা সুতার ধুতিই বোঝাত, আর, এখন তার সঙ্গে গরদ, পাটও যুক্ত হয়েছে। সুতরাং, দামের তারতম্য নিয়ে এই দুই বিভিন্ন সময়ের তুলনা করা শক্ত।

তেমনি, "মোজা" বললে ১৯১০ সালে হয়ত শুধু সূতার মোজাই বোঝাত, আর, এখন মোজা বললে উল ও সিল্কের মোজাও ধরতে হবে। 'মুভিং বেস্' ব্যবহার করলে এসব মুস্কিল এড়ান চলে।

এবার দেখা যাক কতটা তথ্য হিসাবের মধ্যে নেওয়া হবে। আয়ত্বাধীন সমগ্র তথ্য নিয়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করা যায়; আবার, মাত্র নমুনার (স্যাম্প্‌ল্) উপর নির্ভর করেও সূচক-সংখ্যা তৈরী করা চলে। কোন কোন ক্ষেত্রে নমুনার উপর নির্ভর করা ছাড়া উপায় থাকে না। যেমন, ধর, জীবনযাত্রার মান বিষয়ক সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে চাই। শুধু মুদির দোকানের কথাই যদি ধরা যায়, তাহ'লেই বুঝবে যে খাদ্যদ্রব্য বললে কত বিভিন্ন রকমের জিনিষ বোঝায়, আর, তাদের দামই বা কত বিভিন্ন। চালের কথাই ধর—আউস ও আমন, আতপ ও সিদ্ধ, দাদখানী ও বাঁকতুলসী প্রভৃতি কত বিভিন্ন ধরণেরই না চাল আছে! তেমনি, সাজ-পোষাকেরই না কত বিচিত্রতা! দামও কত বিচিত্র! সুতরাং জীবনযাত্রার মান নির্দ্ধারণ করতে কত বিচিত্র ও কত বিভিন্ন রকমের পণ্য ও তাদের দরের কথা ভাবতে হয়। তাই কার্য্যকরী একটা মান খাড়া করতে গেলে অনুসন্ধানের ক্ষেত্র স্বভাবতঃই সঙ্কুচিত করে আনতে হয়; এবং, যেসব পণ্য জনসাধারণের দৈনন্দিন জীবনযাত্রায় ব্যবহৃত হয়, অনুসন্ধানকে তারই মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখতে হয়। বাঙালীর প্রধান খাদ্য ভাত, আটা নয়; সকালে উঠেই বাঙ্গালীর এক কাপ চা চাই, কফি হ'লে চলে না; আলু তার নিত্যব্যবহার্য্য খাদ্য, মাংস অপরিহার্য্য নয়, কিন্তু মাছ না হ'লে চলে না। তাই বাঙ্গালীর জীবনযাত্রার মান নির্ণয় করতে গেলে, চাল, চা, আলু, মাছ প্রভৃতির হিসাব নিলেই চলে। বিভিন্ন পণ্যের মধ্যে থেকে সাধারণ লোকে যেসব পণ্য ক্রয় ক'রে থাকে, সেইগুলিকেই সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে নমুনা হিসাবে নিতে হয়। মনে রাখতে হবে যে সূচক-সংখ্যা তৈরীর জন্য তথ্য যা সংগ্রহ করা হয়, তা পণ্য সংক্রান্ত তথ্য নয়, পণ্যের দর সংক্রান্ত তথ্য। এই সব পণ্য কিনতে পাওয়া যায় বিভিন্ন দোকানে, বিভিন্ন দামে, বিভিন্ন সহরে। কাজেই সব রকমের দর নিয়ে সূচক তৈরী করা সম্ভব নয়, নমুনা ধরেই হিসাব করতে হয়। নমুনা হিসাবে স্থির করে নিতে হয় কয়েকটী সহর; তারপর তার মধ্যে থেকে বেছে নিতে হয় কয়েকটা মার্কামারা দোকান। এই ধরণের

নমুনার (স্যাম্পল্) উপর নির্ভর করে যখন সূচক-সংখ্যা তৈরী কর্তে হয়, তখন দেখ্তে হয় যে নমুনা ধরে যে সূচক-সংখ্যা তৈরী হবে তা যেন, যে বিষয় সম্বন্ধে সূচক নেওয়া হয়েছে, সে বিষয়ের উপর সময়ের প্রভাব সম্পূর্ণভাবে প্রতিফলিত করতে পারে।

এবার দেখা যাক কোন্ বিষয়কে কতখানি গুরুত্ব দেওয়া হবে। বিভিন্ন জাতীয় বস্তু নিয়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে হয় বলে, গুরুত্ব দেওয়ার এত প্রয়োজন। মাছ, চাল, দুধ, চিনি প্রভৃতি খাদ্যপণ্য নিয়ে, ধর, সূচক-সংখ্যা তৈরী করা হয়েছে; কিন্তু, খাদ্য হিসাবে এইসব পণ্যগুলির গুরুত্ব ত' সমান নয়; তাই, কার গুরুত্ব কতখানি জানা আবশ্যক। তাহ'লেই প্রশ্ন দাঁড়ায়, গুরুত্ব নির্দ্ধারণের উপায় কি? যদি বল যে, যে-পণ্যের খাদক-সংখ্যা সর্ব্বাধিক তার গুরুত্বই সবচেয়ে বেশী, তাহ'লে সেকথা খুব অযৌক্তিক হবে না, এবং সেইভাবে গুরুত্ব দিয়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করা চলে। তবে, আয়ের কতটা অংশ কোন্ খাদ্যের পিছনে একটা পরিবার ব্যয় করতে প্রস্তুত, তার উপর নির্ভর করে গুরুত্বর মাত্রা স্থির কর্লে হবে বেশী যুক্তিসঙ্গত। ধর, যে পরিবারের দৈনিক আয় দশ আনা, সেই পরিবার—

	চাল	কিন্‌তে—	৫ আনা
	দুধ	" —	২ "
	মাছ	" —	২ "
আর	চিনি	" —	১ "
			১০ আনা

ব্যয় কর্তে প্রস্তুত, তাহলে বল্‌তে পারি যে, এখানে বিভিন্ন পণ্যের গুরুত্ব এই—

চাল	৫০
দুধ	২০
মাছ	২০
চিনি	১০
	১০০

বিভিন্ন পণ্যের গুরুত্ব নির্দ্ধারণ কর্তে আমরা দেখি লোকে কিভাবে সেই সেই পণ্যের পিছনে টাকা ব্যয় কর্তে প্রস্তুত। চালের জন্য যদি

লোকে চিনির পাঁচগুণ খরচা করতে প্রস্তুত থাকে, তাহ'লে বল্‌ব যে চালের গুরুত্ব চিনির পাঁচগুণ। এখন যদি আমরা মধ্যবিত্ত বাঙ্গালীর জীবনযাত্রার মান সম্পর্কে সূচক তৈরী করতে চাই, তাহ'লে প্রথমেই নজর দিতে হবে মধ্যবিত্ত পরিবারের আয়-ব্যয়ের হিসাবের উপর। সম্প্রতি ভারত গভর্ণমেণ্ট স্বল্প মাইনের কর্ম্মচারীদের পারিবারিক বাজেট সম্বন্ধে যে আলোচনা চালিয়েছেন, অনেকটা সেই ধরণের পারিবারিক বাজেট বিশ্লেষণ করে দেখ্‌তে হবে কি ধরণের পণ্যের পিছনে কত টাকা একটা পরিবার ব্যয় করে। বাজেট বিশ্লেষণ করে বিভিন্ন বিষয়ের উপর বিভিন্ন গুরুত্ব আরোপ করে সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে হবে।

এবার দেখা যাক্ সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে কোন্ প্রণালীতে গড় ধরতে হবে। সূচক-সংখ্যা তৈরী কর্‌তে নানা উপায় অবলম্বন করা হয়ে থাকে; এর মধ্যে কোন্‌টী সর্ব্বোৎকৃষ্ট সে বিষয়ে মতভেদ আছে। একই তথ্য অবলম্বন করে বিভিন্ন উপায়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করে দেখা যাক্ কি ফল পাওয়া যায়। আর্ভিং ফিশার ছয় উপায়ে সূচক-সংখ্যা তৈরীর কথা বলেছেন—

(ক) মূল্য-সমষ্টি (প্রাইস্ এগ্রিগেট্)

(খ) সাধারণ গড় (এরিথমেটিক্ অ্যাভারেজ)

(গ) বর্গীয় গড় (জিওমেট্রিক অ্যাভারেজ)

(ঘ) বিপরীত গড় (হারমনিক অ্যাভারেজ)

(ঙ) মধ্যমা (মিডিয়ান্)

(চ) রীতি (মোড্)

কার্য্যতঃ মোড্ ধরে সূচক-সংখ্যা তৈরী হয় না, সুতরাং এ বিষয়ে আলোচনার প্রয়োজন নেই।[২]

(ক) মূল্য-সমষ্টি ধরে সূচক-সংখ্যা তৈরী করতে হলে প্রথমে কোন বিশেষ সময়ের বিভিন্ন পণ্যের দরগুলি যোগ করতে হয়; অপর কোন সময়ে দরের কি পরিবর্তন হ'ল তা এই সমষ্টিভূত দরের সঙ্গে তুলনা করে বোঝা যায়। যদি—

P_0 = "০" সময়ের দরের মাত্রা

P_1 = "১" „ „ „ হয়,

তাহ'লে সূচক-সংখ্যা পাওয়া যাবে এই সূত্র ধরে—

$$\frac{P_1}{Po} : \frac{\Sigma p_1}{\Sigma po}$$

টেবল্ নং ৫৫

পাইকারী দর

পণ্য	একক	১৯১৩ এপ্রিল	১৯৪০ এপ্রিল	১৯৪১ এপ্রিল	১৯৪২ এপ্রিল	১৯৪৩ এপ্রিল
চা (আসাম)	পাঃ	।৶৩	॥৵৮	১/৬	১৵১১	॥/৪
পাট	৪০০ পাঃ	৫৯৲	৬৩৸০	৩৬॥০	৪৭৲	৮০৲
তুলা (ব্রোচ্)	৭৮৪ পাঃ	৩১৭৲	২৩১৲	২২৭৲	১৬০৲	৫১৭৲
চাল (সীতা)	মণ	৬।৵০	৫।/০	৬।০	৬॥০	২৪৲
গম (লায়লপুর)	মণ	৩।৶০	৩৲৯	৩।৶৩	৪৸৵৬	৮'/৬
বাদাম	৫০০ পাঃ	৪৩৲	৩১৸০	২২৸৶৩	৩০।৵০	৭৭।৶০
চাম্ড়া (আগ্রা)	২০ পাঃ	২২৲	১১৲	১০৲	১০॥০	১০॥০
চিনি (কাণপুর)	মণ	৭।৶৬	১২।৵০	৯৶০	১২॥৶০	১৪॥৬
কেরাসীন তেল	২ টিন	৪৶০	৬৸/৬	৭।/০	৮৸৬	৫।/৩
লবণ (এডেন)	১০০ মণ	৫৬৲	৭২৲	১২৭৲	১৫৬৲	৩৬০৲
		৫১৮৸৵৯	৪৩৭॥৶১১	৪৫০৸০	৪৩৭৸৵১১	১০৯৭॥৶৭

এই সূত্র ধরে টেব্ল্ নং ৫৫ থেকে সূচক-সংখ্যা তৈরী করে নীচে দেখান হ'ল। মূল্য-সমষ্টিগুলি দেওয়া হয়েছে ২নং স্তম্ভে ; আর, তুলনার সুবিধার জন্য ঐ সংখ্যাগুলিকে রিলেটিভ্ হিসাবে ব্যক্ত করা হয়েছে ৩নং স্তম্ভে।

টেবল্ নং ৫৬

বর্ষ (১)	সূচক (মূল্য-সমষ্টি) (২)	সূচক-রিলেটিভ্ (১৯১৩=১০০) (৩)
১৯১৩ এপ্রিল	৫১৮৸৵৯	১০০
১৯৪০ „	৪৩৭॥৶১১	৮৪
১৯৪১ „	৪৫০৸০	৮৭
১৯৪২ „	৪৩৭৸৵১১	৮৪
১৯৪৩ „	১০৯৭॥৶৭	২১১

(খ) একটা উপায় হ'ল, প্রত্যেক পণ্যের দরকে কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ের দরের তুলনায় রিলেটিভে পরিবর্ত্তন করা এবং পরে সব রিলেটিভ্ থেকে গড় নেওয়া। নীচে ২ বৎসরের হিসাব নিয়ে এই উপায়টী বোঝানর চেষ্টা করা হয়েছে; এখানে ১৯১৩কে বেস্ বলে ধরা হয়েছে—

টেব্‌ল্ নং ৫৭

পণ্য	১৯১৩		১৯৪০	
	দর	রিলেটিভ্	দর	রিলেটিভ্
(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)
চা	।৶৩	১০০	॥৵৮	১৪৭
পাট	৫৯৲	১০০	৬৩৸০	১০৮
তূলা	৩১৭৲	১০০	২৩১৲	৭৩
চাল	৬৷৵০	১০০	৫।৴০	৮৩
গম	৩।৶০	১০০	৩ ৻৯	৮৯
বাদাম	৪৩৲	১০০	৩১৸০	৭৪
চামড়া	২২৲	১০০	১১৲	৫০
চিনি	৭।৶৬	১০০	১২।৵০	১৬৬
কেরাসিন তেল	৪৶০	১০০	৬৸৶৬	১৬৩
লবণ	৫৬৲	১০০	৭২৲	১২৯
		১০০০		১০৮২

এই সংখ্যাগুলি থেকে ১৯১৩ ও ১৯৪০-এর রিলেটিভ্ দরগুলির গড় সহজেই নেওয়া যায়। যদি—

po' = বেস্ বৎসরের কোন পণ্যের মূল্য

p_1' = '১' সময় পর ঐ পণ্যর মূল্য হয়,

তাহ'লে, $\frac{p_1'}{po'}$ = সেই পণ্যর দর-রিলেটিভ্ হবে

পণ্য-সংখ্যা যদি N হয় তাহ'লে '১' সময়ের সূচক-সংখ্যা পাওয়া যাবে এই সূত্রে—

$$\frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{po}\right)}{N}$$

যে উদাহরণ নিয়েছি তাতে—

$$\text{সূচক (১৯১৩)} = \frac{১০০০}{১০} = ১০০$$

$$\text{সূচক (১৯৪০)} = \frac{১০৮২}{১০} = ১০৮.২$$

অন্যান্য বৎসরের সূচক-সংখ্যাও এই ভাবে বার করা যায়। এখানে পণ্যের দরগুলিকে শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করে গড় নেওয়া হয়েছে।

(গ) টেব্‌ল্ নং ৫৭ স্তম্ভ (৫)-এ যে সব রিলেটিভ্ পেয়েছি সেগুলিকে পরিমাপ হিসাবে সাজিয়ে লিখ্‌লে দাঁড়াবে—

৫০	১০৮
৭৩	১২৯
৭৪	১৪৭
৮৩	১৬৩
৮৯	১৬৬

এখানে সবচেয়ে কম রিলেটিভ্ দর হচ্ছে ৫০, আর, সর্ব্বাধিক রিলেটিভ্ দর হচ্ছে ১৬৬; সুতরাং মধ্যমা-মান (মিডিয়ান্ ভ্যালু) দাঁড়াচ্ছে ১০৮। এই মধ্যমা-মানই হ'ল ১৯৪০শের সূচক-সংখ্যা; বাকী সূচক-সংখ্যাগুলিও এইভাবেই ধরা যায়।

(ঘ) রিলেটিভ্ দরের বর্গীয় গড় ধরে সূচক-সংখ্যা কি ভাবে তৈরী করা যায় এবার দেখা যাক। পূর্ব্বেই দেখেছি যে রিলেটিভ্ পাওয়া যায় $\left(\frac{p_1'}{p'_0}\right)$ সূত্র ধরে; 'N'-সংখ্যক রিলেটিভের বর্গীয় গড় পাওয়া যাবে নীচের সূত্র ধরে—

$$\text{বর্গীয় গড়} = Mg = \sqrt[n]{\frac{p_1'}{p_0'} \times \frac{p_1''}{p_0''} \times \frac{p_1'''}{p_0'''} \times \cdots\cdots}$$

লগারিথিম নিলে দাঁড়াবে—

$$\text{Log } Mg = \frac{\text{Log}\left(\frac{p_1'}{p_0'}\right) + \log\left(\frac{p_1''}{p_0''}\right) + \log\left(\frac{p_1'''}{p_0'''}\right) + \cdots\ \cdots}{N}$$

এই সূত্র ধরে কি ভাবে সূচক নির্ণয় করতে হবে তা ৫৮ নং টেব্‌লে দেখান হয়েছে; ১৯১৩ এবং ১৯৪০—মাত্র এই দুই বৎসরের কথা নিয়েই হিসাব করে দেখান হয়েছে।

টেবল্ নং ৫৮

পণ্য (১)	রিলেটিভ দর ১৯১৩ (২)	(২) নং-এর লগারিথিম (৩)	রিলেটিভ দর ১৯৪০ (৪)	(৪) নং-এর লগারিথিম (৫)
চা	১০০	২·০	১৪৭	২·১৬৭৩
পাট	১০০	২·০	১০৮	২·০৩৩৪
তুলা	১০০	২·০	৭৩	১·৮৬৩৩
চাল	১০০	২·০	৮৩	১·৯১৯১
গম	১০০	২·০	৮৯	১·৯৪৯৪
বাদাম	১০০	২·০	৭৪	১·৮৬৯২
চামড়া	১০০	২·০	৫০	১·৬৯৯০
চিনি	১০০	২·০	১৬৬	২·২২০১
কেরাসিন তেল	১০০	২·০	১৬৩	২·২১২২
লবণ	১০০	২·০	১২৯	২·১১০৬
		২০·০		২০·০৪৩৬

$$\text{Log } Mg\ (১৯১৩) = \frac{২০}{১০} = ২$$

Mg = ২-এর অ্যান্টি-লগারিথিম্ = ১০০

$$\text{Log } Mg\ (১৯৪০) = \frac{২০\cdot০৪৩৬}{১০} = ২\cdot০০৪৩৬$$

Mg = ২·০০৪৩৬-এর অ্যাঃ লগ = ১০১

(ঙ) $\frac{p_1'}{p_0'}$ নির্দেশ করে কোন একটা পণ্যের রিলেটিভ দর; এদের বিপরীত (রেসিপ্রোক্যাল) হ'ল $\frac{p'_0}{p'_1}$; সুতরাং, N-সংখ্যক রিলেটিভ দরের হারমোণিক গড় পাওয়া যাবে নীচের সূত্রে—

যদি H = হারমোণিক গড় হয়—

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{p'_0}{p_1'} + \frac{p_0''}{p_1''} + \frac{p_0'''}{p_1'''} + \cdots}{N}$$

অথবা $H = \dfrac{N}{\Sigma\left(\frac{p_0}{p_1}\right)}$

নীচের উদাহরণে এই সূত্র ধরে হিসাব কি করে করতে হবে দেখান হয়েছে—

টেবল নং ৫৯

পণ্য	রিঃ দর ১৯১৯	(২) নং-এর বিপরীত (রেসিপ্রক্যাল)	রিঃ দর ১৯৪০	(৪) নং-এর বিপরীত (রেসিপ্রক্যাল)
(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)
চা	১০০	·০১	১৪৭	·০০৬
পাট	১০০	·০১	১০৮	·০০৯
তূলা	১০০	·০১	৭৩	·০১৩
চাল	১০০	·০১	৮৩	·০১২
গম	১০০	·০১	৮৯	·০১১
বাদাম	১০০	·০১	৭৪	·০১৩
চামড়া	১০০	·০১	৫০	·০২০
চিনি	১০০	·০১	১৬৬	·০০৬
কেরাসিন তেল	১০০	·০১	১৬৩	·০০৬
লবণ	১০০	·০১	১২৯	·০০৭
		·১০		·১০৩

$$H\ (১৯১৯) = \frac{১০}{·১০} = ১০০$$

$$H\ (১৯৪০) = \frac{১০}{·১০৩} = ৯৭$$

অধিকাংশ ক্ষেত্রেই বর্গীয় গড়, সাধারণ গড়ের চেয়ে কম, আর হারমোণিক গড় বর্গীয় গড়ের চেয়ে কম। এই সব পদ্ধতির মধ্যে কোন্‌টা গ্রহণ করা যাবে? সূচক-সংখ্যাগুলি যাচাই করার একটা সূত্র দিয়েছেন আর্ভিং ফিশার। তাকে বলা হয় "টাইম্ রিভার্সাল টেষ্ট"। এই উপায়ে দেখা হয় যে সম্মুখে ও পশ্চাতে দুই দিকেই বেস ধরে সূচক-সংখ্যা নির্দ্ধারণ করলে ফল একই হয় কিনা। ধর, দেখা গেল যে ১৯৩৯-এর তুলনায় ১৯৪২-এ চালের দর ১০ টাকা মণ থেকে ২০ টাকা মণ হয়েছে; তাহ'লে সূচকে ব্যক্ত করলে দেখা যাবে যে ১৯৪২-এর দর ১৯৩৯-এর ২০০% (পার্সেণ্ট) আর ১৯৩৯-এর দর হ'ল ১৯৪২-এর তুলনায় ৫০% পার্সেণ্ট। একটা সংখ্যা হ'ল আর একটার বিপরীত

(রেসিপ্রোক্যাল)। (২·০০×·৫০) দুইটী সংখ্যার গুণফল হ'ল এক। যে-কোন প্রণালী অবলম্বন করে সূচক-সংখ্যা তৈরী করা হোক না কেন, যদি কোন বৎসরের সাধারণ দরের মাত্রা পূর্ব্ব বৎসরের ২০০ পার্সেণ্ট হয়, তাহ'লে বিপরীতটীও সত্য হবে ; অর্থাৎ, পূর্ব্ব বৎসরের দরের তুলনায় পরবর্তী বৎসরের দর ৫০ পার্সেণ্ট হবে। দুই বৎসরের তথ্য নিয়ে সূচক-সংখ্যা তৈরী করলে, বেসের যদি অদল-বদল করা যায় তাহ'লে বিপরীত ফল পাওয়া যাবে ; অর্থাৎ, দুইটী রিলেটিভের গুণফল এক হবে। তা না হ'লে বল্‌তে হবে যে সূচক-সংখ্যাটী হয়েছে একপেশে।

গুরুত্ব দান (Weightage) :

দর পরিবর্তন সঠিকভাবে নির্দ্দেশ করতে হ'লে, যে-পণ্যর যতখানি গুরুত্ব সেই অনুযায়ী গুরুত্ব দেওয়া প্রয়োজন হয়। গুরুত্ব দেওয়ার বিভিন্ন প্রণালী অবলম্বন করে নীচে দেখান গেল সূচক-সংখ্যার উপর কি ফল দেখা দেয়।

টেবল্ নং ৬০

বাংলাদেশ

পণ্য	একক	দর		উৎপাদন (টন)	
		১৯৩১-৩২	১৯৪৩-৪৪	১৯৩১-৩২	১৯৪৩-৪৪
(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)	(৬)
চাল	মণ	৩।/০	১৫৲	৯৪,৯৩,০০০	১,১৮,১৬,০০০
গম	মণ	৩৷৷০	১২/০	৩৪,০০০	৫১,০০০
ডাল	মণ	৩৲	১১।৵০	৫৬,০০০	১,১৪,০০০

পণ্যের পরিমাণ বোঝাতে যদি "q" ব্যবহার করা যায় এবং গুরুত্ব বোঝাতে পণ্যের উৎপাদনের পরিমাণ ধরি, তাহ'লে গুরুত্ববিশিষ্ট মূল্য-সমষ্টি বোঝাবে এই সূত্রে—

$$\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

সূচক-সংখ্যা নির্দ্দেশক এই সূত্রটীকে বলা হয় "লেস্‌প্যেরেস্-এর সূত্র"।

টেব্‌ল্ নং ৬১তে (৫) ও (৮) নং স্তম্ভ যোগ করে, ১৯৩১-৩২ বা ১৯৪৩-৪৪ যে কোন বর্ষকে বেস ধরে, সূচক-রিলেটিভ বার করা যায়।

$$১৯৪৩\text{-}৪৪ \text{ সূচক} = \frac{১৪৩৪৪২১২৫}{৩১৭৩২৫৬২} = ৪৫২$$

এখানে গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে বেস পিরিয়ডের উৎপাদন-পরিমাণ ধরে। কিন্তু পরবর্তী বৎসরের উৎপাদন-পরিমাণ ধরেও গুরুত্ব দেওয়া যায়; অর্থাৎ, "১" সময়ের দরের সঙ্গে "o" সময়ের দরের তুলনা করতে গুরুত্ব হিসাবে "q_1" ("১" সময়ে উৎপাদন-পরিমাণ), এবং "২" সময়ের দরের সঙ্গে "o" সময়ের দরের তুলনা করতে "q_2" ("২" সময়ে উৎপাদন-পরিমাণ) ব্যবহার করেও সূচক-সংখ্যা তৈরী করা যায়, সূত্রটী তাহ'লে দাঁড়ায়—

$$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_o q_o}$$

একে বলা হয় "পাশের সূত্র"।

এ পর্য্যন্ত পরিমাণের উপর নির্ভর করে গুরুত্ব দেওয়ার কথা বলা হয়েছে; গুরুত্ব হিসাবে মূল্য-ও ব্যবহার করা চলে। মূল্যের উপর নির্ভর করে গুরুত্ব দেওয়ার ৪টী উপায়ের কথা ফিশার বলেছেন—

(১) প্রত্যেকটী গুরুত্ব = বেস্ বর্ষ দর × বেস বর্ষ উৎপাদন-পরিমাণ $(p_o \times q_o)$

(২) " = " × নির্দ্দিষ্ট বর্ষ " " $(p_o \times q_1)$

(৩) " = নির্দ্দিষ্ট বর্ষ দর × বেস বর্ষ " " $(p_1 \times q_o)$

(৪) " = " × নির্দ্দিষ্ট বর্ষ " " $(p_1 \times q_1)$

(১)-দফা উপায় অবলম্বন করে বিভিন্ন ধারার গড়ে গুরুত্ব দিয়ে কি ফল পাওয়া যায় এবার দেখার চেষ্টা করব।

রিলেটিভ্ দরের সাধারণ গড় নিয়ে গুরুত্ব দিতে হলে, প্রত্যেকটী রিলেটিভ্‌কে অনুরূপ গুরুত্ব দিয়ে গুণ করে, গুণফলগুলি যোগ করতে হয়, ও তারপর, যোগফলকে গুরুত্বর সমষ্টি দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় সূচক-সংখ্যা। টেব্‌ল্ নং ৬২-তে প্রক্রিয়াটী বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে। লক্ষ্য করবে যে টেব্‌ল্ নং ৬১-তে যে সূচক-সংখ্যা পেয়েছি, আর, এখন সে সূচক-সংখ্যা পেলুম তা হুবহু এক। রিলেটিভ্ দরকে গুরুত্ব দিয়ে, সাধারণ গড় ধরে সূচক-সংখ্যা নির্ণয় করলে, গুরুত্ববিশিষ্ট মূল্য-সমষ্টি ধরে নির্ণীত সূচক-সংখ্যার সমান হবে।

টেব্‌ল নং ৬১

পণ্য		দর ৯৩১-৩২	রুত্ব ১৯৩১-৩২।শ উৎপাদন-পরিমা	দর × গুরুত্ব		গুরুত্ব ১৯৪৩-৪৪ উৎপাদন-পরিমাণ	দর × গুরুত্ব
		p_0	q_0	$p_0 \times q_0$	p	q_0	$p_1 q_0$
		(৩)	(৪)			(৭)	(৮)
চাল	মণ	৩/	৯৩০		১৫৲	৯৪৯৩০০০	১৪২৩৯৫০০০
গম	মণ	৩।০	৩৪০		২/০	৩৪	৪১০১২৫
ডাল	মণ	৩৲	৫৬০		১১।৴	৫৬	৬৩৭০০০
							৪৪২১২৫

টেব্‌ল নং ৬২

পণ্য	রিঃ দর ১৯৩১-৩২	গুরুত্ব	দর × গুরুত্ব	রিঃ দর ১৯৪৩-৪		
চাল				৪৫২		১৪২১৫৪০
গম		২৲		৩৪৫	১২৲	৪১৪০
ডাল		৭৲		৩৭৯	১৭৲	৬৪৪৩
						১৪৩২১২৩

[১৯৩১-৩২শের মোট উৎপাদনকে মূল্য দিয়ে গুণ করে ধরা হয়েছে গুরুত্ব]

গুরুত্ববিশিষ্ট সাধারণ গড় (১৯৩১-৩২) $= \frac{৩১৭৪০০}{৩১৭৪}$

গুরুত্ববিশিষ্ট সাধারণ গড় (১৯৪৩-৪৪) $= \frac{১৪৩২১২৩}{৩১৭৪} = ৪৫২$

গুরুত্ববিহীন বর্গীয় গড় যেভাবে নির্ণয় করা হয়, গুরুত্ববিশিষ্ট বর্গীয় গড়ও (জিওমেট্রিক মিন্) সেইভাবেই নির্ণয় করতে হবে, শুধু প্রত্যেকটী রিলেটিভের লগারিথিম নিয়ে অনুরূপ গুরুত্ব দিয়ে গুণ করতে হবে এবং গুণফলগুলিকে যোগ করে, গুরুত্ব সমষ্টি দিয়ে ভাগ করে, ভাগফলের অ্যান্টি-লগারিথিম বার করলেই পাওয়া যাবে সূচক-সংখ্যা। টেব্‌ল নং ৬৩-তে প্রক্রিয়াটী বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে।—

টেব্‌ল্ নং ৬৩

১৯৩১-৩২ = ১০০

পণ্য	রিঃ দর ১৯৪৩-৪৪	লগারিথিম রিঃ দরের	গুরুত্ব	লগ রিঃ দর × গুরুত্ব
চাল	৪৫২	২·৬৫৫১	৩১৪৫	৮৩৫০·২৮৯৫
গম	৩৪৫	২·৫৩৭৮	১২	৩০·৪৫৩৬
ডাল	৩৭৯	২·৫৭৮৬	১৭	৪৩·৮৩৬২
			৩১৭৪	৮৪২৪·৫৭৯৩

$$\text{Log } Mg = \frac{৮৪২৪·৫৭৯৩}{৩১৭৪}$$

$$= ২·৬৫৪২$$

$$Mg = ৪৫১·০$$

গুরুত্ব দিয়ে এই যে বিভিন্ন সূচক-সংখ্যা বিভিন্ন উপায় অবলম্বন করে পেলুম, এর মধ্যে কোন্‌টা বেশী গ্রহণযোগ্য বুঝব কি ক'রে? ফিশার একটা উপায় বার করেছেন তাকে বলা হয় "ফ্যাক্টার রিভার্সাল্ টেষ্ট"।

পণ্যের পরিমাণকে প্রত্যেক এককের দর দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায় মোট দর, বীজগণিতের ভাষায় বলা যায় $p'q'$-এর সমান; এক বছরের মোট মূল্য, পূর্ব্ববর্তী বর্ষের মোট মূল্যের রেশিও হিসাবে ব্যক্ত করলে বলা যায় $= \frac{p_1' q_1'}{p_0' q_0'}$।

কোন বৎসরের তুলনায় পরবর্তী বৎসরের দর ও পরিমাণ যদি দ্বিগুণ হয়, তাহ'লে দর-রিলেটিভ্ ও পরিমাণ-রিলেটিভ দুইই দাঁড়াবে ২০০ এবং মোট মূল্য-রিলেটিভ্ ৪০০। পরবর্ত্তী বৎসরের মোট মূল্য হবে পূর্ব্ববর্তী বৎসরের চারগুণ। (দর × পরিমাণ) রিলেটিভের সমান হ'ল মূল্য-রিলেটিভ্। বছরের পর বছর দর-পরিবর্তন লক্ষ্য করে কয়েকটী পণ্য সম্বন্ধে যদি সূচক-সংখ্যা তৈরী করি—তাহ'লে আমরা আশা করব যে ঐ রিলেটিভগুলির গুণফল হবে, প্রথম ও দ্বিতীয় বৎসরের মোট মূল্যের রিলেটিভের সমান—যদি না হয় তাহ'লে বুঝতে হবে ভুল কোথাও রয়েছে এই সূচক-সংখ্যাগুলির মধ্যে। উদাহরণ স্বরূপ মূল্য-সমষ্টির সূত্রটাই ধরা যাক—

$$\left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)$$

পরিমাণ-বিষয়ক সূচক নির্ণয়ের সূত্র, এই সূত্র থেকেই তৈরী করা যায়, শুধু "p" ও "q"-র অদল-বদল করে। সূত্রটী দাঁড়ায়—

$$\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$$

এখানে দর (p_0) লব ও হর দুয়েতেই এক, কেননা আমরা শুধু পরিমাণের পরিবর্তন কতখানি সেটাই যাচাই করতে চাই।

পরিমাণ-সূচক, ১৯৪০ ৪১(১৯১৩-১৪ = ১০০) = $\frac{৩৯৬৬১০০০}{৩১৭৩২৫৬২}$

= ১·২৪৯৮৫১

১৯১৩-১৪কে বেস্ ধরে শতকরায় ব্যক্ত করলে দাঁড়ায় ১২৫। আর দর-সূচক ঐ একই সূত্র ধরে পাওয়া যায় = ৪৫২

সুতরাং, $\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ = ৪·৫২০৩৪৪ × ১·২৪৯৮৫১

= ৫·৬৪৯১৫৬..................(ক)

আর, মূল্য-রাশিও হবে—

$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ = $\frac{১৭৯১৪৪৮১২}{৩১৭৩২৫৬২}$

= ৫·৬৪৫৫৪৬..........................(খ)

এখানে (ক) ও (খ) এক হ'ল না; সুতরাং, সূচক-সংখ্যা সম্পূর্ণ নির্ভুল বলে ধরা যায় না। সূচক-সংখ্যার নির্ভুলতা নির্ণয়ের যেদু'টী সূত্র (টাইম রিভার্সাল্

টেষ্ট ও ফ্যাক্টর রিভার্সাল টেষ্ট) আর্ভিং ফিশার দিয়েছেন সেগুলি দিয়ে যাচাই করলে সূচক তৈরীর যেকটা উপায়ের কথা এপর্যান্ত বলেছি তার কোনটাই টেঁকে না। ফিশার নিজেই এই সমস্যা এড়াবার একটা উপায় বার করেছেন। "আদর্শ" সূচক-সংখ্যা তৈরীর উপায় একে বলা যায়; বাউলি, পিগু, ওয়াল্শ্ ও ইয়াং স্বাধীনভাবে গবেষণা করে ঐ একই সূত্র দিয়েছেন। সূত্রটি এই—

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

এই সূত্র ধরে উপরের উদাহরণটী থেকে ১৯৪৩-৪৪শের সূচক সহজেই নির্ণয় করা যায়।—

আদর্শ সূচক $= \sqrt{৪\text{'}৫২০৩৪৪ \times ৪\text{'}৫১৬৯০০}$

$= \sqrt{২০\text{'}৪১৭৯৪২} = ৪\text{'}৫১৯$

শতকরা হিসাবে ব্যক্ত করলে দাঁড়ায় $= ৪৫১\text{'}৯$

নির্ভুলতা যাচাই-এর উভয় সূত্র ধরেই দেখা যায় যে সূচকটী ঠিক

টাইম রির্ভাসাল টেষ্ট নিলে—

দর-সূচক, ১৯৪৩ – ৪৪(১৯১৩-১৪ = ১০০) = ৪'৫১৯

দর-সূচক, ১৯১৩-১৪(১৯৪৩-৪৪ = ১০০) = '২২১২

৪'৫১৯ × '২২১২ = ১'০০

ফ্যাক্টর রির্ভাসাল টেষ্ট নিলে—

দর-সূচক $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} = \sqrt{২০\text{'}৪১৭৯} = ৪\text{'}৫১৯$

পরিমাণ-সূচক $= \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} = \sqrt{১\text{'}৫৬০৯}$

$= ১\text{'}২৪৯$

দর-সূচক × পরিমাণ-সূচক = ৪'৫১৯ × ১'২৪৯

= ৫'৬৪৪২৩১

মূল্য রেশিও $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} =$ ৫'৬৪৫৪৫৬

নীচের টেবলে তুলনার সুবিধার জন্য বিভিন্ন উপায়ে তৈরী সূচক-সংখ্যাগুলি দেওয়া হ'ল।

টেবল্ নং ৬৪

বেস্ ১৯১৩-১৪ = ১০০

সূত্র	সূচক ১৯৪৩-৪৪
$\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$	৪৫২·০৩
$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$	৪৫১·৬৯
আদর্শ সূচক	৪৫১·৯
গুরুত্ববিশিষ্ট বর্গীয় গড়	৪৫১·০

সব সময়ে (মাসিক কি বার্ষিক) পরিমাণ হাতের কাছে পাওয়া যায় না বলে আদর্শ সূচক-সংখ্যা নেওয়া সম্ভব হয় না। এই অসুবিধা এড়াবার জন্য ফিশার সূত্রটী সংশোধন করে নীচের সূত্রটী দিয়েছেন; এজ্‌ওয়ার্থ ও মার্শ্যাল এই সূত্রটী গ্রহণের পক্ষেই মত দিয়েছেন। 'আদর্শ সূচক' থেকে, এই উপায়ে নেওয়া সূচকের তফাৎ ১ পার্শেণ্টের এক চতুর্থাংশেরও কম। সূত্রটি এই—

$$\frac{\Sigma (q_0+q_1)p_1}{\Sigma (q_0+q_1)p_0}$$

নীচের টেবলে হিসাব করে দেখান হয়েছে—

টেবল্ নং ৬৫

পণ্য	একক	দর ১৯১৩-১৪	১৯১৩-১৪ পরিমাণ + ১৯৪৩-৪৪ পরিমাণ (সহস্র)	স্তম্ভ (৩) × স্তম্ভ (৪)	দর ১৯৪৩-৪৪	স্তম্ভ (৬) × স্তম্ভ (৪)
(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)	(৬)	(৭)
চাল	মণ	৩।৴	২১,৩০৯	৭০৫৮৬	১৫৲	৩১৯৬৩৫
গম	মণ	৩।৶	৮৫	২৯৭·৫	১২৶০	১০২৫
ডাল	মণ	৩৲	১৭০	৫১০	১১।৶০	১৯৩৪
				৭১৩৯৩·৫		৩২২৫৯৪

$$\frac{\Sigma (q_0+q_1)p_1}{\Sigma (p_0+q_1)p_0} = \frac{৩২২৫৯৪}{৭১৩৯৩·৫} = ৪·৫১৮$$

∴ ১৯৪৩-৪৪ সূচক = ৪৫১·৮

অষ্টাদশ অধ্যায়

কোরিলেশন:

টাইম্ সিরিজ নিয়ে আলেচেনায় আমরা মাত্র একটী রাশির (ভ্যারিয়েবল্) পরিবর্তন নিয়ে আলোচনা করেছি। কালপ্রবাহের সঙ্গে সঙ্গে চলরাশিটি বা ভ্যারিয়েবল্টী কিভাবে বেড়েছে বা কমেছে এবং বিভিন্ন শক্তির প্রভাবই বা কতখানি দেখার চেষ্টা করেছি। এবার দেখার কথা, দুইটী রাশির—অর্থাৎ X-ভ্যারিয়েবল্ ও Y-ভ্যারিয়েবল্ দুইটীর—পরিবর্তনের মধ্যে কোন যোগসূত্র বা সম্বন্ধ নির্ণয় করা যায় কিনা। বারিপাত ও শষ্য-উৎপাদন, মোটর গাড়ীর দাম ও মোটর-উৎপাদন প্রভৃতি জাতীয় বিষয়গুলির সম্বন্ধ গাণিতিক সূত্রে ব্যক্তকরা যায় কিনা দেখা যাক। যদি দুইটী বা ততোধিক রাশি সমভাবে ওঠা-নাম্য করে, অর্থাৎ একের পরিবর্তনে অপর(গুলি)তে অনুরূপ পরিবর্তন দেখা যায়, তা'হলে বলা হবে যে রাশিগুলি "কোরিলেটেড্"। সুতরাং, কোরিলেশন নিয়ে যে সমস্যা তা হচ্ছে দু ধরণের—

(১] একটি রাশি অপরটীর ওপর কতখানি নির্ভরশীল তার পরিমাণ করা এবং

[২] একটী রাশির সম্ভাব্য পরিবর্তনকে অপর রাশির মাপে ফেলা

একটী উদাহরণ নিয়ে কোরিলেশনের সমস্যাটা বোঝার চেষ্টা করা যাক্। বিবাহের সময় স্বামী ও স্ত্রীর বয়স নিয়ে নীচের টেবল্টী (নং ৬৬) তৈরী করা হয়েছে। (১) ও (২) নং স্তম্ভে স্বামী ও স্ত্রীর বয়স দেওয়া হয়েছে। এই তথ্য অবলম্বন করে বিন্দু সন্নিবেশ করলে প্রত্যেকটী বিন্দু স্বামী ও স্ত্রীর বয়সের সম্বন্ধ নির্দ্দেশ করবে। বিন্দুসন্নিবিষ্ট এই ধরণের চিত্রকে বলা হয় "স্ক্যাটার ডায়াগ্রাম"। বিন্দু-সন্নিবেশ দেখে বেশ আঁচ করা যায় যে, স্বামী-স্ত্রীর বয়সের মধ্যে একটা যোগসূত্র আছে। টাইম্ সিরিজে ঝোঁক নির্দ্দেশ করতে যেমন একটা সরলরেখা ব্যবহার করা হয়েছিল, এখানেও তেমনি, এই সম্বন্ধ বোঝাতে একটী

সরলরেখার সাহায্য নেওয়া যায়। যে সরলরেখাটী এই সন্নিবিষ্ট বিন্দুগুলির সঙ্গে খাপ খেয়ে যাবে, সেই সরলরেখাটি প্রকাশ করবে এই দুটী রাশির ভ্যারিয়েবেলের গড় সম্বন্ধ। এই রেখাকে বলে "রিগ্রেশন্ লাইন" বা গড়রেখা ; এবং যে সমীকরণ থেকে এই রেখাটী পাওয়া যায় তাকে বলে 'রিগ্রেসন সমীকরণ'।

টেব্‌ল নং ৮৮

স্বামী-স্ত্রীর বিবাহের সময় বয়স

স্বামীর বয়স X (১)	স্ত্রীর বয়স Y (২)	XY (৩)	X^2 (৪)	Y^2 (৫)
২২	১৬	৩৫২	৪৮৪	২৫৬
২৪	১৮	৪৩২	৫৭৬	৩২৪
২৫	১৯	৪৭৫	৬২৫	৩৬১
২৬	২০	৫২০	৬৭৬	৪০০
২৭	২০	৫৪০	৭২৯	৪০০
২৮	১৭	৪৭৬	৭৮৪	২৮৯
৩০	২২	৬৬০	৯০০	৪৮৪
৩১	২০	৬২০	৯৬১	৪০০
৩২	২১	৬৭২	১০২৪	৪৪১
৩৩	২৩	৭৫৯	১০৮৯	৫২৯
৩৪	২৩	৭৮২	১১৫৬	৫২৯
৩৫	২৪	৮৪০	১২২৫	৫৭৬
৩৬	২৫	৯০০	১২৯৬	৬২৫
৩৭	২৬	৯৬২	১৩৬৯	৬৭৫
মোট ৪২০	২৯৪	৮৯৯০	১২৮৯৪	৬২৮৯

রিগ্রেসান্ লাইন নির্ণয়ের জন্য এই দুটী সমীকরণের সমাধান আবশ্যক—

$$\Sigma(y) = Na + b\Sigma(x)$$

$$\Sigma(xy) = a\ \Sigma(x) + b\Sigma(x^2)$$

টেবল্ নং ৬৬ থেকে মানগুলি বসিয়ে পাওয়া যাচ্ছে—

$$২৯৪ = ১৪a + ৪২০b$$

$$৮৯৯০ = ৪২০\ a + ১২৮৯৪b$$

অতএব, $a = ৩\cdot৬৬$

$b = \cdot৫৮$

সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ হল, $Y = ৩\cdot৬৬ + \cdot৫৮X$

পূর্ব্বেই বলেছি এই রেখা নির্দ্দেশ করবে গড় সম্বন্ধ; সুতরাং, ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এই রেখাটী কতখানি কার্য্যকরী না জান্‌লে আলোচনায় প্রয়োগকরা যুক্তিসঙ্গত হবে না। তাই, এই 'গড় রেখা' থেকে ব্যতিক্রমের পরিমাণ জানা প্রয়োজন। "ভেদ" পরিমাপ করতে ষ্ট্যাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন্ যেমন নিয়েছিলুম, এখানেও সেই ষ্ট্যাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন ধরেই হিসাব করার চেষ্টা করা যাক্।

গড়-রেখা থেকে যে ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম তাকে বল্‌ব "ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার অফ্ এষ্টিমেট"। S হরপ ধরা হবে ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার অফ্ এষ্টিমেটের প্রতীক হিসাবে। S নির্ণয় করতে হলে Y-এর মান হিসাব করতে হবে নীচের সমীকরণ থেকে—

$$Y = ৩\cdot৬৬ + \cdot৫৮X.$$

Y-এর প্রকৃত ব্যতিক্রম Y-এর হিসাব-করা-মান থেকে কতখানি তা হিসাব করে দেখতে হবে। এই ব্যতিক্রমগুলির বর্গ নিয়ে গড় নির্ণয় করতে হবে ও তারপর বর্গমূল নিতে হবে; সেটাই হবে ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার অফ্ এষ্টিমেট। টেবল্ নং ৬৭তে প্রণালীটী বুঝিয়ে দেওয়া হয়েছে।

এই টেবল্ থেকে দেখতে পাই—

$$S_y = \sqrt{\frac{১৭\cdot৭৫২০}{১৪}}$$

$$= \sqrt{১\cdot২৬৮০} = ১\cdot১২৭$$

ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার অফ্ এষ্টিমেট ধরা হয়েছে Y-variable-এর; তাই, এখানে Sy প্রতীক ব্যবহার করেছি।

টেবল্—নং ৬৭
ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার অফ্ এষ্টিমেট হিসাব

স্ত্রীর বয়স (প্রকৃত-Y)	Y-হিসাব করা হয়েছে	d (১)—(২)	d^2
(১)	(২)	(৩)	(৪)
১৬	১৬·৪২	— ·৪২	·১৭৬৪
১৮	১৭·৫৮	+ ·৪২	·১৭৬৪
১৯	১৮·১৬	+ ·৮৪	·৭০৫৬
২০	১৮·৭৪	+১·২৬	১·৫৮৭৬
২০	১৯·৩২	+ ·৬৮	·৪৬২৪
১৭	১৯·৯০	—২·৯০	৮·৪১০০
২২	২১·০৬	+ ·৯৪	·৮৮৩৬
২০	২১·৬৪	—১·৬৪	১·৬৮৯৬
২১	২২·২২	—১·২২	১·৪৮৮৪
২৩	২২·৮০	+ ·২০	·০৪০০
২৩	২৩·৩৮	— ·৩৮	·১৪৪৪
২৪	২৩·৯৬	+ ·০৪	·০০১৬
২৫	২৪·৫৪	+ ·৪৬	·২১১৬
২৬	২৫·১২	+ ·৮৮	·৭৭৪৪
মোট			১৭·৭৫২০

দুই বা ততোধিক বিষমরাশির (ভ্যারিয়েবল্) সম্বন্ধ পরিমাপ করার দুটী সূত্র পাওয়া গেছে। ভেদের মাত্রা (মেজার অফ্ ডিগ্রি অফ্ ভ্যারিয়েশন) পরিমাপ করার জন্য কোইফিসিয়েণ্ট অফ ভ্যারিয়েশন প্রয়োগ করা হয়েছিল ; তেমনি, দুইটী রাশির সম্বন্ধের মাত্রা (ডিগ্রি অফ্ রিলেশানসিপ্) পরিমাপ করার জন্য কোইফিসিয়েণ্টের প্রয়োগ আছে। কার্ল পিয়ার্সান্, কোইফিসিয়েণ্ট নির্ণয়ের একটা উপায় বার করেছেন। ষ্ট্যাণ্ডার্ড ব্যতিক্রম বোঝাতে আমরা পূর্ব্বে σ সঙ্কেত ব্যবহার করেছি ; এখানেও সেই সঙ্কেত প্রয়োগ করলে—

$$\text{কোরিলেশানের পরিমাণ হয়} = \frac{S_y}{\sigma_y}$$

এই সূত্রেরই আর একটা রূপ আছে—

$$\text{কোঃ পরিঃ} = \sqrt{১ - \frac{S_y}{\sigma_y{}^2}}$$

রৈখিক সমীকরণ সম্বন্ধে যখন এই পরিমাপ প্রয়োগ করা হয়, তখন একে বলা হয়, "কোইফিসিয়েণ্ট অফ্ কোরিলেশন"; কোইফিসিয়েণ্ট অফ কোরিলেশন বোঝাতে সাঙ্কেতিক অক্ষর "r" ব্যবহার করা হয়। যদি গড়-রেখা থেকে ব্যতিক্রম কোনরূপ না থাকে, তা'হলে $S_y=$ ০; সুতরাং $r=$ ১ দাঁড়াবে। আবার σ_y-এর বেশী S_yর মান হতে পারে না; অর্থাৎ যখন $S_y=\sigma_y$ তখনই S_y হ'চ্ছে সর্ব্বাধিক এবং সে ক্ষেত্রে $r=0$ দাঁড়ায়। সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে r-এর মান 'শূন্য' থেকে ১-এর মধ্যে থাকবে; দুটী রাশির সম্বন্ধযোগ যত ঘনিষ্ঠ হবে, r-এর মান তত বেশী ১-এর কাছাকাছি হবে।

লাইন অফ রিগ্রেসান্, ষ্ট্যাণ্ডার্ড এষ্টিমেট অফ্ এরার ও কোইফিসিয়েণ্ট অফ কোরিলেশন নির্ণয়ের যে প্রণালী উপরে ব্যক্ত করলুম, তাতে আঁক-যোথ একটু বেশী করতে হয়; S_y নির্ণয়ের একটা সংক্ষিপ্ত উপায় আছে; সেটা প্রয়োগ করলে শ্রম কিছুটা বাঁচে। উপরের উদাহরণে গড়-রেখা থেকে প্রত্যেকটা উদাহরণের ব্যতিক্রম ধরে, সেগুলির বর্গ নিয়ে গড় বার করে, এই গড়ের বর্গমূল নিয়ে S_y নির্ণয় করা হয়েছিল। নীচের সমীকরণ থেকেও S_y-এর মান নির্ণয় করা যায়—

$$S_y{}^2=\frac{\Sigma(Y^2)-a\Sigma(Y)-b\Sigma(XY)}{N}$$

গড়-রেখায় a ও b ধ্রুবরাশি দুটীর মান যা, এখানেও a ও b-র মান তাই হবে।

$$\text{অধিকন্তু } r=\sqrt{১-\frac{S_y{}^2}{\sigma_y{}^2}} \text{ সূত্রটীকে বদলে লেখা যায়}$$

$$r^2=\frac{a\Sigma(Y)+b\Sigma(XY)-NCy^2}{\Sigma(Y)-NCy^2}$$

যদি Cyকে ধরা হয় মূলবিন্দু থেকে Y-র গড়ের অন্তর বলে। মূলবিন্দু শূন্য ধরলে (Y-রেখার উপর) C_y হবে Y-র গড়ের সমান।

সুতরাং, বর্তমান উদাহরণে—

$$Cy=\frac{২৯৪}{১৪}=২১$$

$$\text{অতএব, } r^2 = \frac{৩\cdot৬৬ \times ২৯৪ + \cdot৫৮ \times ৮৯৯০ - ১৪ \times ২১ \times ২১}{৬২৮৯ - ১৭ \times ২১ \times ২১}$$

$$= ১\cdot০০১৭$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{১\cdot০০১৭} = ১\cdot০০১$$

উদাহরণের সংখ্যা বেশী হলে উদাহরণগুলিকে শ্রেণীবদ্ধ করে সাজান প্রয়োজন হয়। কিন্তু, দুইটা রাশিই পরিবর্তনশীল বলে সাধারণ ফ্রিকোয়েন্সী টেবলে যেভাবে সাজান হয় তার থেকে একটু পৃথকভাবে সাজান প্রয়োজন। এই পরিবর্ত্তিত ফ্রিকোয়েন্সী টেবল্‌কে বলা হয় "কোরিলেশন টেবল্"। স্বামী ও স্ত্রীর বয়স নিয়ে একটা কোরিলেশন টেবল্ করে দেখান হ'ল (টেবল্ নং ৬৮)। লক্ষ্য করবে যে এই টেবলে উভয়রাশি সম্বন্ধেই যথেচ্ছভাবে একটা মূলবিন্দু (arbitrary origin) ধরা হয়েছে ; হিসাবে একক ধরা হয়েছে শ্রেণী-অন্তর

এই টেবল্ থেকে রিগ্রেসান্ সমীকরণের জন্য এবং S ও r নির্ণয়ের জন্য যে-সব মান প্রয়োজন সবই পাওয়া যাবে। X' ও Y' যদি মূলবিন্দু থেকে ব্যতিক্রম নির্দ্দেশ করে, তা'হলে $\Sigma(X'Y')$ নির্ণয় করতে আর একটা নতুন টেবল্ নিলে সহজ হয় (টেবল্ নং ৬৯)। রিগ্রেসান্ লাইন, ষ্ট্যাণ্ডার্ড এরার ও কোইফিসিয়েণ্ট অফ কোরিলেশন নির্ণয়ের জন্য এইসব মান জানা প্রয়োজন—

$$N = ৬২৮৭ \qquad \Sigma(X'^2) = ৩৭৭২$$

$$\Sigma(X') = ১৭১৮ \qquad \Sigma(X'Y') = ৭০৭৮$$

$$\Sigma(Y'') = ১৬৩৯০ \qquad \Sigma(y'^2) = ৫২২০২$$

রিগ্রেসান সমীকরণ দাঁড়ায়—

$$Y' = ২\cdot৪ + \cdot৭৮X'$$

$$Sy^2 = \frac{\Sigma(Y'^2) - a\Sigma(Y') - b\Sigma(Y'X')}{N}$$

$$= \frac{৫২২০২ - ২\cdot৪ \times ১৬৩৯০ - \cdot৭৮ \times ৭০৭৮}{৬২৮৭}$$

$$= ১\cdot১৬৮$$

$$Sy = \sqrt{১\cdot১৬৮} = ১\cdot০৮১$$

টেবল্ নং ৬৮

X— স্ত্রীর বয়স

Y— স্বামীর বয়স

শ্রেণী অন্তর	মধ্য বিন্দু	f	d'	fd'	fd'²	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫	৪৫-৫০	৫০-৫৫	৫৫-৬০	৬০-৬৫	৬৫-৭০	৭০-৭৫	মোট
মধ্য বিন্দু						১৭.৫	২২.৫	২৭.৫	৩২.৫	৩৭.৫	৪২.৫	৪৭.৫	৫২.৫	৫৭.৫	৬২.৫	৬৭.৫	৭২.৫	
f						৫০৭০	৯১৪	৫৮	১১৪	২২	১৫	৬	৩	২	১	১	১	৬২৮৭
d'						০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০	১১	
fd'						০	৯১৪	১১৬	৩৪২	৮৮	৭৫	৩৬	২১	১৬	৯	১০	১১	[illegible]
fd'²						০	৯১৪	২৩২	১০২৬	৩৫২	৩৭৫	২১৬	১৪৭	১২৮	৮১	১০০	১২১	[illegible]
৮০-৮৫	৮২.৫	২	১৩	২৬	৩৩৮		১										১	২
৭৫-৮০	৭৭.৫	২	১২	২৪	২৮৮							১				১		২
৭০-৭৫	৭২.৫	৪	১১	৪৪	৪৮৪	১							১	১	১			৪
৬৫-৭০	৬৭.৫	১	১০	১০	১০০						১							১
৬০-৬৫	৬২.৫	৬	৯	৫৪	৪৮৬	২	১		৩									৬
৫৫-৬০	৫৭.৫	১৩	৮	১০৪	৮৩২	২		১		১	৬	২	১					১৩
৫০-৫৫	৫২.৫	৪৯	৭	৩৪৩	২৪০১	৩	১	১	২৭	১১	৪	১	১					৪৯
৪৫-৫০	৪৭.৫	৬৫	৬	৩৯০	২৩৪০	১২	৭	৩	৩৫	৫	২	১						৬৫
৪০-৪৫	৪২.৫	১০৮	৫	৫৪০	২৭০০	৫৫	৭	১৩	৩০	২	১							১০৮
৩৫-৪০	৩৭.৫	৯৫৫	৪	৩৮২০	১৫২৮০	৭১৫	২০০	২৫	১৩	২								৯৫৫
৩০-৩৫	৩২.৫	১১৭৫	৩	৩৫২৫	১৭৭৭৫	১০৯০	৬৭০	১১	৪									১১৭৫
২৫-৩০	২৭.৫	২০০৪	২	৪০৬৮	৮১০৬	১৭২৮	৩০০	৩	২		১							২০০৪
২০-২৫	২২.৫	১০৪২	১	১০৪২	১০৪২	৯৩২	১০৭	১		১				১				১০৪২
১৫-২০	১৭.৫	৬১	০	০	০	৬০						১						৬১
মোট		৬২৮৭		১৬৬৩০	৫২২০২	৫০৭০	৯১৪	৫৮	১১৪	২২	১৫	৬	৩	২	১	১	১	৬২৮৭

টেবল্ নং ৬৯

X'	Y'	f	$X'Y'$
০	০	৩০	০
৬	০	১	০
০	১	৯৩২	০
১	১	১০৭	১০৭
২	১	১	২
৪	১	১	৪
৮	১	১	৮
০	২	১৭২৮	০
১	২	৩০০	৬০০
২	২	৩	১২
৩	২	২	১২
৫	২	১	১০
০	৩	১৫৯০	০
১	৩	৩৭০	১১১০
২	৩	১১	৬৬
৩	৩	৪	৩৬
০	৪	৭১৫	০
১	৪	২০০	৮০০
২	৪	২৫	২০০
৩	৪	১৩	১৫৬
৪	৪	২	৩২
০	৫	৫৫	০
১	৫	৭	৩৫
২	৫	১৩	১৩০
৩	৫	৩০	৪৫০
৪	৫	২	৪০
৫	৫	১	২৫
০	৬	১২	০
১	৬	৭	৪২
২	৬	৩	৩৬
৩	৬	৩৫	৬৩০
৪	৬	৫	১২০
৫	৬	১	[illegible]

X'	Y'	f	$X'Y'$
৬	৬	১	৩৬
০	৭	৩	০
১	৭	১	৭
২	৭	১	১৪
৩	৭	২৭	৫৬৭
৪	৭	১১	৩০৮
৫	৭	৪	১৪০
৬	৭	১	৪২
৭	৭	১	৪৯
০	৮	২	০
২	৮	১	১৬
৪	৮	১	৩২
৫	৮	৬	২৪০
৬	৮	২	৯৬
৭	৮	১	৫৬
০	৯	২	০
১	৯	১	৯
৩	৯	৩	৮১
৫	১০	১	৫০
০	১১	১	০
৭	১১	১	৭৭
৮	১১	১	৮৮
৯	১১	১	৯৯
৬	১২	১	৭২
১০	১২	১	১২০
১	১৩	১	১৩
১১	১৩	১	১৪৩

যেসব মান পেলুম সবই হচ্ছে শ্রেণী-অন্তর এককে ; শ্রেণী-অন্তর এখানে ৫ ; সুতরাং,

$$Sy = ৫ \times ১^{\cdot}০৮১ = ৫^{\cdot}৪০৫$$

টাইম্ সিরিজ থেকেও কোরিলেশন বার করা যায়, তবে তত সহজ হয় না এবং একটু বিভিন্ন পথও ধরতে হয়। পূর্বেই দেখেছি টাইম্ সিরিজ নিয়ে আলোচনা করতে হলে সাধারণ ঝোঁক, ওঠা-নামা (নিয়মিত ও নিয়মহীন)

প্রভৃতির কথা ভাবতে হয়। সাধারণ ঝোঁকগুলির (সেকুলার ট্রেণ্ড্‌স্‌) তুলনা করতে হলে কোরিলেশন কোইফিসিয়েণ্ট ব্যবহার করা হয় না, কেননা, দুটী সিরিজের ঝোঁক এক বলে বলা যায় না যে একটী আর একটীর উপর নির্ভর করে। কার্য্যতঃ ঝোঁক বা ঋতুক্রমে পরিবর্ত্তন পরিমাপ করতে কোইফিসিয়েণ্ট প্রয়োগ করা হয় না। চক্রক্রমে পরিবর্ত্তন (cyclical fluctuation) ও ক্ষণস্থায়ী পরিবর্ত্তন পরিমাপ করতেই কোইফিসিয়েণ্ট অফ কোরিলেশন প্রয়োগ করা হয়। দুই বা ততোধিক টাইম সিরিজের চক্রক্রমে-পরিবর্ত্তনের-কোরিলেশন নির্ণয়ের জন্য সাধারণ ঝোঁকরেখা থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করা হয়। $=a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$ সূত্র ধরে আগে ঝোঁক রেখাটী নির্ণয় করে নিয়ে, সেই ঝোঁকরেখা থেকে ব্যতিক্রম হিসাব করে, এই ব্যতিক্রমগুলির কোইফিসিয়েণ্ট অফ কোরিলেশন নিতে হয়। প্রাথমিক শিক্ষায় এর প্রয়োজন নেই বলে বিশদ ব্যাখ্যা করলুম না।